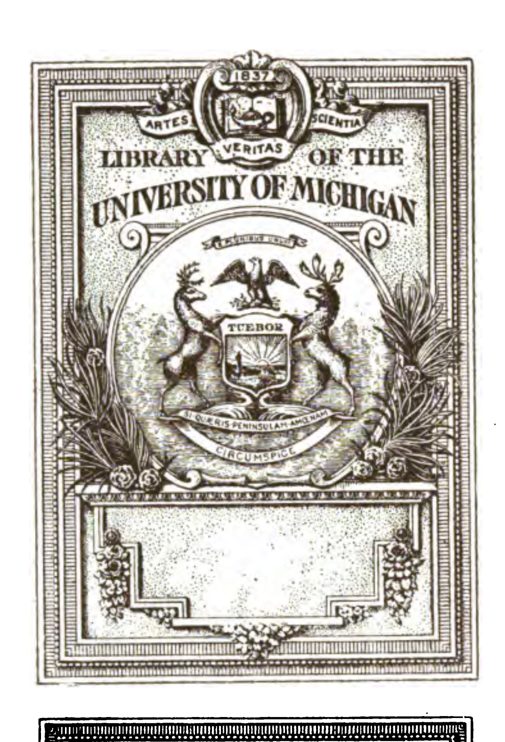

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

Die typischen Geometrien und das Unendliche

Von

Petronijević

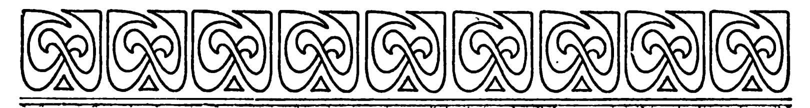
Branislav Petronievics
Dr. phil.



Heidelberg 1907.
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung.

Verlags-Archiv Nr. 166.

Printed in Germany



Vorwort.

Die vorliegende Abhandlung bildet eine wichtige Ergänzung zu meinem vor drei Jahren erschienenen metaphysisch-mathematischen Werke. Während ich mich in diesem letzteren auf den Standpunkt der strengen Logik gestellt, und, wie dies bei einem exakt sein wollenden Methaphysiker nicht anders sein kann, eine der Wirklichkeit entsprechende Mathematik gesucht und gefunden habe, habe ich mich hier auf den Standpunkt der sogenannten „reinen“ formalen Logik gestellt und von demselben aus meine Geometrie *neben* der geltenden als eine bloß logisch *mögliche* hingestellt. Der hier eingenommene Standpunkt ist also ein *neutraler* Boden, auf dem vielleicht die Verständigung mit den Gegnern meiner neuen Geometrie (und sie hat übrigens bis jetzt nur Gegner) leichter zu erzielen sein wird, als dies auf dem Standpunkte des strengen Metaphysikers, der nur das Wirkliche (resp. das wirklich Mögliche) für das Wahre hält, möglich ist. Auf dem neuen Standpunkte fallen nämlich alle die metaphysischen Schwierigkeiten fort, mit denen die neue Geometrie in ihren ersten Grundlagen zu kämpfen hat, und die konsekutive diskrete Raumform wird zu einer logisch mindestens ebenso berechtigten Raumform, wie dies für die inkonsekutive kontinuierliche Raumform fast ausnahmslos angenommen wird und für die inkonsekutive diskrete Raumform von vielen Seiten zugestanden (von vielen anderen wieder bestritten) wird. Die *formelle* Möglichkeit der beiden letzteren Formen kann, wenn man sich nur den Unterschied der formellen von der *logischen* Möglichkeit in eigentlichem Sinne klar vergegenwärtigt, gar nicht in Abrede gestellt werden, und ich glaube, daß man dasselbe auch für die konsekutive diskrete Raumform, die Raumform der neuen Geometrie, nach meinen nunmehrigen Ausführungen wird anerkennen müssen.

*

Außer dieser ersten wichtigen Folgerung in bezug auf die konsekutive Raumform und die für dieselbe geltende Geometrie, die sich auf dem in dieser Abhandlung eingenommenen Standpunkte ergibt, besteht noch eine zweite nicht minder wichtige Folgerung in bezug auf dieselbe, und dies ist die Unabhängigkeit der konsekutiven Raumform von der Frage nach der Wahrheit des Finitismus und des Infinitismus. In meinem Werke habe ich die logische Notwendigkeit der konsekutiven Raumform aus der logischen Notwendigkeit des Finitismus resp. aus der logischen Unmöglichkeit des Infinitismus deduziert. Hier aber wird die konsekutive Raumform ganz unabhängig von dem Finitismus als eine formell mögliche aufgestellt, so daß man ganz wohl Infinitist sein und trotzdem die neue Geometrie vertreten kann. Wem es also um Infinitismus um jeden Preis zu tun ist, der kann es auch auf dem Standpunkte der neuen Geometrie bleiben, ja es stimmt sogar dieser neue Standpunkt mit dem arithmetischen Infinitismus besser überein, als dies für den Standpunkt der geltenden Geometrie mit ihren inkonsekutiven Raumformen gilt, da ja die unendlich sein sollende Zahlenreihe ebenso aus konsekutiven Elementen besteht wie die konsekutive Raumform.

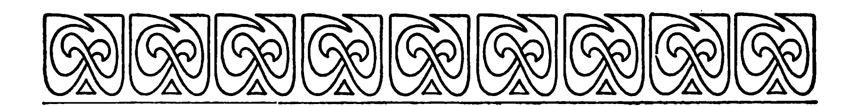
Die allgemeine logische Möglichkeit der konsekutiven Raumform einerseits, die Unabhängigkeit der neuen Geometrie von dem Finitismus andererseits sind also die beiden vornehmsten Resultate unserer Abhandlung. In dieselbe habe ich aber noch eine Untersuchung eingeschoben, die diesem allgemeinen Plane derselben gar nicht entspricht. So sehr es mir in dem allgemeinen Plane der Abhandlung auch lag, den Infinitismus mit der neuen Geometrie zu versöhnen, so stellte es sich mir doch bei näherem Zusehen heraus, daß diese Versöhnung, streng genommen, gar nicht möglich ist, und daß der Infinitismus, auf die konsekutive Raumform angewandt, zu Widersprüchen führt, die viel offenkundiger sind, als dies bei seiner Anwendung auf die übrigen Raumformen (bei diesen letzteren in erster Reihe in bezug auf ihre Ausdehnung und erst in zweiter auf ihre Punktanzahl) der Fall ist. Und so habe ich nicht umhin können, diese Widersprüche in einem besonderen Abschnitt hervorzuheben und darauf eine neue Begründung des Finitismus zu gründen. Derjenige, dem der Infinitismus eine logisch notwendige Doktrin zu sein scheint, wird allerdings in meinen diesbezüglichen Ausführungen entweder lauter Irrtümer erblicken müssen — dann bestehen für ihn keine Bedenken mehr, seinen

Standpunkt mit demjenigen der neuen Geometrie zu versöhnen — oder er wird, wenn er das nicht tut, die konsekutive Raumform verwerfen und nur eine mit der unbestimmten Endlichkeit sachlich übereinstimmende unendliche Ausdehnung der inkonsekutiven zuschreiben. Aus diesen Gründen halte ich also die Einschiebung dieser Untersuchung in die Abhandlung für gerechtfertigt, bemerke aber, daß der Infinitist diesen Abschnitt auch ganz überspringen kann, wenn er ein Ganzes in seinem Sinne durchaus haben will.

Wie man sich nun auch zu den einzelnen Ausführungen dieser Abhandlung stellen mag, ich hoffe, daß man in derselben jedenfalls eine Untersuchung über die in wahrem Sinne typischen Raumformen und Geometrien finden wird, die bisher meines Wissens gefehlt hat. Man hat in letzter Zeit von nicht-euklidischen und anderen Geometrien viel gesprochen, dabei aber die letzte Struktur des Raumes immer in einem oder höchstens in zwei verschiedenen Bedeutungen in Betracht gezogen. Eine systematische Untersuchung der Raumformen in dieser letzteren Hinsicht hat aber bisher gefehlt, und diese empfindliche Lücke in der allgemeinen Geometrie auszufüllen, ist auch eine der Aufgaben dieser Abhandlung.

Ich sage absichtlich: eine der Aufgaben dieser Abhandlung. Denn so wichtig diese Untersuchung an und für sich auch ist, so hat sie doch, streng genommen, nur einen vorläufigen Wert, denn schließlich müssen wir uns für eine der formell möglichen Raumformen und Geometrien als die logisch notwendige entscheiden. Daß diese Entscheidung im Sinne der neuen Geometrie ausfallen wird, daran hege ich keinen Zweifel, und die gegenwärtige Abhandlung ist, wie oben bemerkt, auch als ein wichtiger Beitrag in dieser Richtung zu betrachten.

Dr. Branislav Petronievics.



Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

Allgemeine Aufgabe der Abhandlung. Die erste spezielle Aufgabe: Aufstellung aller formell möglichen und der typischen Raumformen. Die zweite spezielle Aufgabe: Aufstellung der beiden typischen Geometrien oder die formelle Erweiterung des Infinitismus. Die dritte spezielle Aufgabe: Die transfiniten Zahlen und das konsekutive Diskretum oder die logische Begründung des Finitismus. Die vierte spezielle Aufgabe: Das Kontinuumproblem.

Erster Abschnitt.

Aufstellung aller formell möglichen Raumformen 4

Über den Begriff der formellen im Unterschied von demjenigen der logischen Möglichkeit. Existenzart und Ausdehnungsart des Raumes als der inhaltliche und der formale Gesichtspunkt zur Aufstellung der verschiedenen Raumformen. Sie ergeben im ganzen vier solche spezielle Gesichtspunkte. Raumformen nach dem Gesichtspunkte der Realität. Raumformen nach dem Gesichtspunkte der Teilung in Punkte. Raumformen nach dem Gesichtspunkte der Sequenz der Punkte. Raumformen nach dem Gesichtspunkte der Zahl der Punkte. Die bisherige Mathematik und diese Gesichtspunkte. Verhältnis dieser verschiedenen Gesichtspunkte zueinander. Der Begriff des konsekutiven (diskreten) Raumes enthält keine formell logischen Widersprüche. Tabelle der Verhältnisse der verschiedenen Gesichtspunkte zueinander. Die acht formell möglichen Raumformen, die hieraus folgen. Die vier typischen Raumformen, auf die sich diese acht auf dem formellen Standpunkte der Mathematik zurückführen.

Zweiter Abschnitt.

Die zwei typischen Raumformen und Geometrien und die geometrische Struktur des unendlichen Diskretums 18

Der Unterschied im Inhaltsreichtum an geometrischen Figuren zwischen dem unendlichen Kontinuum und dem endlichen konsekutiven Diskretum. Die zwei typischen Geometrien, die daraus folgen. Nachweis, daß die kontinuierliche Geometrie für das inkonsekutive unendliche Diskretum uneingeschränkt gilt. Der prinzipielle Unterschied zwischen den beiden Geometrien. Nachweis, daß die kontinuierliche Geometrie für das konsekutive

Seite

unendliche Diskretum prinzipiell nicht gelten kann. Nachweis, daß die diskrete Geometrie für alle Formen derselben uneingeschränkt gilt.

Dritter Abschnitt.

Die transfiniten Zahlen und das konsekutive Diskretum . . 31

Die transfiniten Zahlenlehren Kantors und Veroneses. Grundzüge der transfiniten Zahlenlehre Kantors. Unterschiede zwischen der arithmetischen wohlgeordneten Menge 1, 2, 3, ... ν, ... ω und der entsprechenden geometrischen (konsekutiven) wohlgeordneten Punktmenge (ω + 1). Die aus diesen Unterschieden sich ergebenden Schwierigkeiten, die transfinite Zahl ω Kantors auf die konsekutive Punktmenge anzuwenden. Die erste Antwort auf die Frage, welche Ordinalzahl dem dem ω-Punkte in der geometrischen Punktmenge (ω + 1) unmittelbar vorausgehenden Punkte entspricht, und die Unmöglichkeit derselben. Die zweite Antwort auf diese Frage und deren Unmöglichkeit. Die dritte Antwort, die die eine Grundvoraussetzung der transfiniten Zahlenlehre Kantors, ω — 1 sei = ω (resp. sein Gleichheitskriterium), preisgibt, und die Unmöglichkeit derselben. Nachweis, daß sich auch die transfinite Zahlenlehre Veroneses, welche die beiden Grundvoraussetzungen Kantors (die Zahl ω und das Gleichheitskriterium der eindeutigen Zuordnung) preisgibt, auf die konsekutive unendliche Punktmenge nicht anwenden läßt.

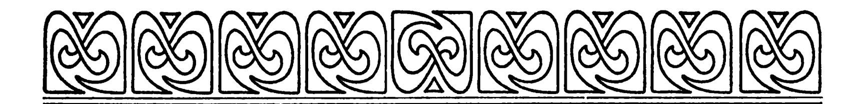
Nachweis, daß der letzte Ursprung all dieser Widersprüche in der logischen Unmöglichkeit des Bestehens der transfiniten Zahl ω Kantors in dem konsekutiven Diskretum liegt. Der daraus folgende Fundamentalsatz, daß jede aus konsekutiven Punkten bestehende Punktmenge, die einen ersten und einen letzten Punkt hat, notwendigerweise endlich sein muß. Die drei Lösungen, die sich auf den Widerstreit der arithmetischen wohlgeordneten Menge 1, 2, 3, 4, ... ν, ... ω und der entsprechenden geometrischen wohlgeordneten Punktmenge beziehen. Die erste Lösung, welche in der ersten die Zahl ω und in der zweiten den Punkt (ω) bestreitet und beide für unbestimmt endlich erklärt. Die zweite Lösung, welche entweder die Zahl ω in der ersten behauptet, den ω-Punkt in der zweiten dagegen bestreitet oder diese beiden gleichermaßen bestreitet, die beiden Mengen aber für aktuell unendlich erklärt. Die dritte Lösung, welche die logische Möglichkeit des konsekutiven Diskretums überhaupt bestreitet.

Nachweis, daß diese letztere Lösung den Unendlichkeitsvertreter nur scheinbar von den Schwierigkeiten des Unendlichkeitsbegriffs befreit, Unmöglichkeit der unendlich kleinen Strecke im Raume, wenn die unendlich große Gerade erster Ordnung mit dem Endpunkte im Unendlichen nicht zugelassen wird. Nachweis dieser Unmöglichkeit im konsekutiven Diskretum. Nachweis derselben im inkonsekutiven Diskretum. Nachweis der Notwendigkeit der unendlich kleinen Strecke im inkonsekutiven Diskretum, wenn in demselben unendlich große Geraden höherer Ordnung zugelassen werden. Übertragung derselben Schlußfolgerungen auf das Kontinuum. Übergang zum nächsten Abschnitt.

Vierter Abschnitt. Seite

Bemerkungen zum Kontinuumproblem 76

Formulierung des Kontinuumproblems. Grundzüge der Kantorschen Lehre von den transfiniten Mächtigkeiten. Bestimmung des Begriffs des Zahlenkontinuums. Mächtigkeit der Gesamtheit der rationalen Zahlen. Mächtigkeit des Zahlenkontinuums. Nachweis, daß Zahl- und Raumkontinuum nicht eindeutig einander entsprechen. Bestimmung der Mächtigkeit des Raumkontinuums oder die Lösung des Problems des Raumkontinuums. Verhältnis der Mächtigkeit des unendlichen Diskretums zu den typischen Geometrien.



Einleitung.

In der vorliegenden Abhandlung stelle ich mir zur Aufgabe, das Verhältnis der typischen Geometrien zum Unendlichen möglichst vollständig zu bestimmen. Diese Aufgabe schließt einerseits die Bestimmung der typischen Raumformen und andererseits die Untersuchung des Verhältnisses des Unendlichen zu diesen letzteren in sich. Die erstere von diesen beiden Untersuchungen setzt wieder die Bestimmung aller formell möglichen Raumformen überhaupt voraus und die letztere führt zu der Untersuchung der wichtigen Frage nach der sogenannten Mächtigkeit des Kontinuums. Und so gliedert sich also die allgemeine Aufgabe dieser unserer Abhandlung in vier spezielle Aufgaben, die wir demgemäß in den vier Abschnitten, in die wir unsere Abhandlung teilen, behandeln werden.

In dem ersten Abschnitte derselben werden wir also zunächst alle die formell möglichen Raumformen bestimmen, um dann von ihnen diejenigen auszuscheiden, die von besonderer Bedeutung sind.

In dem zweiten Abschnitte werden wir dann von diesen letzteren weiter diejenigen ausscheiden, die von typischer Bedeutung sind, indem wir die für diese typischen Raumformen geltenden typischen Geometrien aufstellen und den Geltungsbereich der letzteren in bezug auf die ersteren feststellen werden. Das wichtigste Resultat dieser Untersuchung wird in dem Nachweis bestehen, daß die für das endliche konsekutive Diskretum geltende diskrete Geometrie, deren Grundprinzipien ich in meinem metaphysisch-mathematischen Werke ausführlich dargelegt habe,[1] und die neben der geltenden kontinuierlichen Geometrie als typisch zu betrachten ist, sich ohne Einschränkung

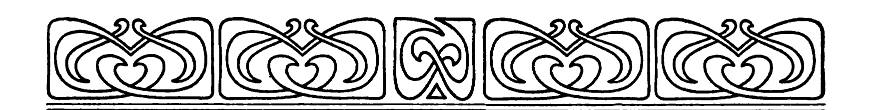
[1] „Prinzipien der Metaphysik, I. Band, 1. Abteilung, Allgemeine Ontologie und die formalen Kategorien. Mit einem Anhang: Elemente der neuen Geometrie und drei Tafeln mit 56 geometrischen Figuren. Heidelberg, Carl Winter, 1904."

auf einen konsekutiven, aus unendlich vielen Punkten bestehenden diskreten Raum übertragen läßt, während wiederum für das inkonsekutive unendliche Diskretum die kontinuierliche Geometrie (die Geometrie des Kontinuums) sich als uneingeschränkt geltend erweist. Durch die Übertragung der diskreten Geometrie vom endlichen auf das unendliche konsekutive Diskretum erweitern wir das Geltungsgebiet des Infinitismus, der sich bisher mit der kontinuierlichen und der inkonsekutiv-diskreten Raumform identifiziert hatte, erheblich, indem wir ihn mit der neuen Geometrie, die ihn im Prinzip aufzuheben schien, versöhnen wollen.

Im dritten Abschnitte wollten wir dann, was das Resultat und die stillschweigende Voraussetzung des zweiten war, die Möglichkeit der Erweiterung des Infinitismus im Sinne der Anwendung desselben auf die konsekutive Raumform, auch vom Standpunkte der strengen Logik aus untersuchen. Und als Resultat dieser Untersuchung ergab sich uns das gerade Gegenteil dessen, was wir ursprünglich wollten: Statt die Möglichkeit der Anwendung des Infinitismus auf die neue Raumform, von den allgemeinen logischen Gründen gegen den Unendlichkeitsbegriff abgesehen, nachzuweisen, waren wir bald genötigt einzusehen, daß diese Anwendung undurchführbar ist und daß in dieser Undurchführbarkeit ein neuer Beweis der allgemeinen Wahrheit des Finitismus zu erblicken ist. Und so steht dieser dritte Abschnitt unserer Abhandlung, was den allgemeinen Standpunkt und die Resultate derselben anbetrifft, im Gegensatz zu den beiden ersten und dem folgenden letzten: Während wir uns in diesen dreien auf den Standpunkt der formellen logischen Möglichkeit stellen und die Anwendbarkeit des Infinitismus auf die konsekutive Raumform, deren formelle Möglichkeit, wie in dem ersten Abschnitte ausgeführt wird, nicht in Abrede gestellt werden kann, sich als Resultat dieses Standpunktes ergibt, stellen wir uns in diesem dritten Abschnitte auf den Standpunkt der reellen logischen Möglichkeit (über den Unterschied dieses Standpunkts von dem vorigen vergl. man den Eingang des ersten Abschnittes) und als Resultat ergibt sich die logische Unmöglichkeit des Infinitismus. Dieser dritte Abschnitt bietet so eine neue logische Begründung des Finitismus, die von derjenigen in meinem oben erwähnten Werke gegebenen darin abweicht, daß, während dort aus der Kritik des abstrakten Unendlichkeitsbegriffs auf die logische Möglichkeit der konsekutiven diskreten Raumform geschlossen wurde, hier umgekehrt von der logischen

Möglichkeit dieser letzteren ausgegangen und daraus auf die Unmöglichkeit des Infinitismus geschlossen wird. Dies wird so ausgeführt, daß ausführlich die Anwendung der transfiniten Zahlenlehre Cantors und Veroneses (insbesondere der ersteren) auf das konsekutive Diskretum untersucht und dann die letzten logischen Gründe aufgezeigt werden, die die Unmöglichkeit dieser Anwendung herbeiführen. Am Ende dieses dritten Abschnittes werden dann noch sehr wichtige Konsequenzen in bezug auf die Unendlichkeit der Ausdehnung nach oben und unten bei den übrigen Raumformen gezogen, die sich aus der vorhergehenden Kritik des Unendlichkeitsbegriffs ergeben, selbst wenn die ganze Grundlage dieser Kritik, das konsekutive Raumdiskretum, als logisch unmöglich verworfen wird.

Im vierten Abschnitte schließlich untersuchen wir, indem wir uns wiederum ganz auf den formellen Standpunkt der beiden ersten Standpunkte stellen, die Frage der sogenannten Mächtigkeit des Kontinuums. Während nun die drei ersten Abschnitte unserer Abhandlung die systematische Darstellung der entsprechenden Probleme erstreben, habe ich mich in diesem letzten Abschnitte nur auf das Notwendigste beschränkt, indem ich nur darauf hinweisen wollte, wie sich das Kontinuumproblem gestaltet, wenn die logische Möglichkeit der konsekutiven Raumform zugelassen wird. Als Resultat dieser Bemerkungen ergibt sich, daß das Problem des geometrischen Kontinuums von demjenigen des arithmetischen Kontinuums zu trennen ist und daß sich das erstere Problem dann leicht lösen läßt, während das zweite nach wie vor ungelöst bleibt.



Erster Abschnitt.

Aufstellung aller formell möglichen Raumformen.

Unter dem formell Möglichen verstehe ich hier (und in dem Laufe der Abhandlung überhaupt) dasjenige, was gewöhnlich (unberechtigterweise) als logisch möglich bezeichnet wird, d. h. alles dasjenige ist formell möglich, dessen allgemeine Eigenschaften in keinem unmittelbaren Widerspruche mit seiner Definition als solcher stehen. Dagegen ist bei mir nur dasjenige in strengem Sinne als logisch möglich zu bezeichnen, was auch reell möglich ist, d. h. dessen Eigenschaften nicht nur Eigenschaften eines in Worten definierten Gedankenwesens, sondern auch Eigenschaften eines in der Wirklichkeit bestehenden (resp. bestehen könnenden) realen Wesens sind. Es hieße aber sich in den Streit über das Verhältnis der Logik zur Metaphysik resp. des Denkens zur Wirklichkeit einlassen, wollten wir hier die Berechtigung dieses Unterschieds näher nachweisen. Ich erwähne denselben nur, um den Standpunkt, auf den ich mich in diesem Abschnitt der Abhandlung stelle, gegen denjenigen abzugrenzen, den ich in dem dritten Abschnitt einnehmen werde und den ich in meinem oben erwähnten metaphysisch-mathematischen Werke eingenommen habe. Hier in diesem Abschnitte aber will ich alle die Raumformen, die sich, formell genommen — formell in dem eben erklärten Sinne — denken lassen, feststellen, ohne mich in die Frage nach ihrer reellen (resp. logischen) Möglichkeit einzulassen, die dann aber in dem dritten Abschnitte nur von einer besonderen Seite beleuchtet werden wird, da das Übrige in dem oben erwähnten Werke schon ausgeführt wurde.

Wenn wir uns nun nach den Gesichtspunkten umsehen, denen gemäß diese Aufstellung der formell möglichen Raumformen zu erfolgen hat, so ist leicht einzusehen, daß diese Gesichtspunkte nur die letzten, aufeinander nicht zurückführbaren Eigenschaften des Raumes betreffen können, mögen diese mehr formaler oder mehr inhaltlicher

Natur sein. Die formale Seite des Raumes besteht und kann nur in seiner Existenzart liegen; die inhaltliche Seite desselben bezieht sich aber auf die Art und Weise seiner Ausdehnung, d. h. darauf, wie beschaffen und in was für einem Verhältnis seine Ausdehnungsteile zueinander stehen. In dieser letzteren Hinsicht bestehen entweder in dem Raume keine einfachen Teile, oder es sind solche einfachen Teile, die Raumpunkte, darin als dessen letzte Bestandteile vorhanden. Im ersten Falle werden die einfachen Punkte in dem Raume bloß gedacht, d. h. sie sind darin in rein fiktiver Weise vorhanden, im zweiten Falle bilden sie dagegen die letzten wirklichen Bestandteile desselben. Ob fiktiv oder wirklich vorhanden, in jedem Falle haben die einfachen Punkte im Raume gewisse grundlegende Verhältnisse, nach denen sich derselbe in verschiedene Grundformen spaltet. Entweder sind die einfachen Punkte, aus denen der Raum besteht, alle von einer und derselben Art, oder es sind zwei Arten von solchen Raumpunkten vorhanden: im ersten Falle ist zwischen zwei Punkten stets ein dritter Punkt von derselben Art vorhanden, im zweiten Falle dagegen haben wir schließlich zwischen zweien Punkten einer und derselben Art einen dazwischenliegenden Punkt von anderer Art. Und schließlich kann die Anzahl der Punkte im Raume als eine unendliche oder als eine endliche gedacht werden. Demgemäß ist es leicht einzusehen, daß die folgenden vier Gesichtspunkte in erschöpfender Weise alle die überhaupt denkbaren Raumformen bestimmen:

1. Nach dem Gesichtspunkte der **Realität** ist ein Raum entweder **leer** oder **reell**. Leer ist der Raum, wenn er ein besonderes Wesen neben dem reellen Seinsinhalt bedeutet (mag man sich denselben als den objektiven absoluten Raum neben der realen Materie im Sinne Newtons oder als eine Anschauung à priori neben dem reellen Empfindungsmaterial im Sinne Kants denken[1]). Reell ist der Raum, wenn er mit dem realen Seinsinhalt zusammenfällt, d. h. wenn die Ausdehnung die Beschaffenheit dieses realen Seinsinhalts selbst ist (Aristoteles, Deskartes, meine Metaphysik[2] ꝛc.).

2. Nach dem Gesichtspunkte der **Teilung** (in Punkte als wirkliche oder fiktive Raumbestandteile) ist ein Raum entweder **kontinuierlich** oder **diskret**. Kontinuierlich heißt ein Raum, dessen (ausge-

[1] Über die reelle Unmöglichkeit eines solchen Raumes vergl. man meine „Prinzipien der Metaphysik ꝛc. ...", S. 168—171.

[2] Ib. S. 171.

dehnte) Teile aktuell gar nicht voneinander getrennt sind, der also aus wirklich geteilten Teilen (in letzter Instanz einfachen Punkten) nicht besteht (so wird der Raum von Newton und von der überwiegenden Mehrzahl der Vertreter der geltenden Geometrie — in neuester Zeit besonders von Veronese — aufgefaßt).[1] Diskret heißt ein Raum, dessen (ausgedehnte) Teile wirklich voneinander getrennt sind, der also aus wirklichen Teilen und in letzter Instanz aus einfachen (unausgedehnten) unteilbaren Punkten besteht (Bolzano, Cantor, meine Metaphysik und viele heutigen Vertreter der geltenden Geometrie).[2]

3. Nach dem Gesichtspunkte der Sequenz der einfachen Punkte ist ein Raum entweder inkonsekutiv oder konsekutiv. Inkonsekutiv heißt ein Raum, in dem zwischen zwei Punkten stets ein dritter Punkt von derselben Art dazwischenliegt (so ist der kontinuierliche Raum der geltenden Geometrie und der diskrete Bolzanos und Cantors inkonsekutiv). Konsekutiv heißt dagegen ein Raum, in dem in letzter Instanz zwischen zwei Punkten kein dritter Punkt mehr von derselben Art dazwischenliegt (der diskrete Raum meiner Geometrie ist ein solcher Raum, denn in demselben liegt zwischen zwei reellen Mittelpunkten, die sich miteinander unmitelbar berühren, kein solcher mehr dazwischen, da der dazwischenliegende Punkt nicht mehr reell, sondern irreell ist).

4. Nach dem Gesichtspunkte der Zahl (der einfachen Punkte) ist ein Raum entweder unendlich oder endlich. Unendlich heißt ein Raum, in dem eine unendliche, endlich, in dem eine endliche Anzahl von Punkten besteht (so ist der Raum der geltenden Geometrie unendlich, derjenige unserer neuen endlich).

Von diesen vier Gesichtspunkten, denen gemäß die Aufsuchung aller überhaupt denkbaren Raumformen zu erfolgen hat, hat die bis-

[1] Über die logische resp. reelle Unmöglichkeit eines solchen Raumes ib. S. 231—244.

[2] Es ist sehr wichtig, den Unterschied zwischen den ausgedehnten Teilen des Raumes und dessen unausgedehnten Teilen, den einfachen Punkten, zu machen, denn nur auf Grund dieses Unterschieds lassen sich die beiden folgenden Gesichtspunkte (Gesichtspunkt 3 und 4) widerspruchslos aufstellen, da sie nur in bezug auf die einfachen Teile, nicht aber in bezug auf die ausgedehnten, gelten. Denn auch in einem in bezug auf die Punkte inkonsekutiven Raume sind die ausgedehnten Teile (z. B. die Teilstrecken einer ganzen Strecke) in letzter Instanz konsekutiv und ebenso kann in einem Raume die Zahl der ausgedehnten Teile (nach oben) endlich sein, während die Anzahl der Punkte dabei unendlich ist.

herige Mathematik nur den zweiten, und zwar erst in der letzten Zeit, voll berücksichtigt, während sie in dem dritten und vierten bis jetzt nur die Merkmale der Inkonsekution und der Unendlichkeit berücksichtigt, dagegen die entgegengesetzten Merkmale der Konsekution und der Endlichkeit ganz außer acht gelassen und in dem ersten fast ausschließlich das Merkmal der Leerheit in Betracht gezogen. Der letzte Grund dieses Nichtberücksichtigens so fundamentaler Merkmale liegt in der Nichtberücksichtigung des dem letzterwähnten entgegengesetzten Merkmals der Realität. Denn wenn einmal die Möglichkeit des reellen Raumes in Betracht gezogen wird, dann läßt sich das Merkmal der Diskretion von dem leeren auf den reellen Raum übertragen, dann aber hindert nichts, die reellen Punkte sich als konsekutive zu denken (was in dem leeren Raume wegen der Leerheit der Punkte unmöglich zu sein scheint, da dann der zwischen zwei solchen Punkten liegende Punkt wiederum leer zu sein scheint, während bei dem reellen Raume die beiden konsekutiven Punkte einerseits und der sie trennende „leere" Punkt andererseits ohne weiters zwei verschiedene Punktenarten darstellen), in welchem Falle dann auch die Möglichkeit der endlichen Anzahl der Raumpunkte leicht eingesehen wird.

Daß man aber das Merkmal der Realität in der reinen Mathematik nicht berücksichtigen will, liegt nur an einem Mißverständnis ihrer formalen Natur. Man glaubt nämlich, durch die Berücksichtigung des reellen Raumes zugleich den formalen Boden der reinen Mathematik verlassen und sich auf den Boden der mathematischen Metaphysik gestellt zu haben. Dies ist aber ein Irrtum. Denn die reine Mathematik kann nicht von der allgemeinen Realitätsfrage des Raumes (der Frage, ob der Raum ein besonderes „leeres" Wesen neben dem reellen ihn erfüllenden Seinsinhalte darstellt, oder mit diesem letzteren — als dessen bloße formale Ordnungsform — zusammenfällt) in dem Sinne abstrahieren, daß sie überhaupt keine Annahme über dessen Realitätsart macht, sondern nur in dem Sinne, daß sie sich in die Diskussion der Frage nach der Berechtigung einer von ihr vorausgesetzten Realitätsart nicht einläßt. Ist dem aber so, dann ist es inkonsequent, in der reinen Mathematik nur den leeren Raum als formelle logische Möglichkeit zu berücksichtigen, weil das eben heißt, nur ein solcher Raum sei auch in der Wirklichkeit denkbar, man stellt sich also nur desto entschiedener auf den Boden der mathematischen (und zwar einer bestimmten mathematischen) Meta-

physik, je mehr man nur den leeren Raum als logische Möglichkeit betont. Höchstens könnte man in der reinen Mathematik von der Realitätsfrage des Raumes noch in dem Sinne abstrahieren, daß man keine bestimmte Annahme in dieser Hinsicht über den Raum macht, nur darf man dann, wie gesagt, nicht aus den Augen verlieren, daß, sobald der Raum als bestehend gedacht werden soll, derselbe entweder als reell oder als leer zu denken ist, denn bedenkt man dies nicht, dann kann man leicht zu dem falschen Schritt verleitet werden, die bloße Abstraktion der rein geometrischen Seite des Raumes zu einer besonderen Realitätsart des Raumes zu machen, in welchem Falle man dann gleichsam zu einer „leeren" Raumform zweiter Potenz gelangen würde (in Wahrheit ist auch die „leere" Raumform erster Potenz in erster Reihe auf ähnliche Art und Weise aus der reellen entstanden). Der von uns in diesem Abschnitte eingenommene Standpunkt ist demnach einzig und allein als der wahre formelle Standpunkt der reinen Mathematik zu bezeichnen, und wir gehen nunmehr dazu über, aus den obigen vier Gesichtspunkten alle die überhaupt, d. h. alle die formell denkbaren Raumformen zu deduzieren.

Um nach diesen vier Gesichtspunkten alle die überhaupt denkbaren Raumformen zu bestimmen, ist es offenbar zunächst notwendig festzustellen, in was für Verhältnissen die in diesen Gesichtspunkten enthaltenen Raumprädikate zueinander stehen, resp. welche von ihnen sich als Prädikate eines und desselben Raumes denken lassen und welche nicht. Die Reihenfolge, in der dies zu geschehen hat, ergibt sich unmittelbar aus der Reihenfolge jener vier Gesichtspunkte.

Daß ein Raum, der leer ist, kontinuierlich sein kann, ist ohne weiteres klar, da ja seit jeher dem leeren Raume die Eigenschaft der strengen Kontinuität beigelegt worden ist. Und ebenso ist es klar, daß sich ein reeller Raum als kontinuierlicher Raum denken läßt. Daß sich derselbe aber auch als diskreter Raum denken läßt, muß man ebenso zugeben, sobald man einen solchen Raum überhaupt als denkbar zuläßt. Denn der einfache reelle Punkt, als der letzte Bestandteil eines solchen Raumes, ist offenbar mathematisch ganz wohl denkbar, da er ja nur das reale Korrelatum der einfachen arithmetischen Einheit darstellt, deren Denkbarkeit niemand in Abrede wird stellen können.[1] Läßt sich nun der reelle Raum diskret denken, so steht nichts

[1] Vgl. darüber „Prinzipien der Metaphysik rc.", S. 203 im Zusammen-

im Wege, sich auch den leeren Raum als einen diskreten zu denken, denn der leere einfache Punkt eines solchen Raumes ist aus demselben Grunde denkbar, aus dem es der reelle einfache Raumpunkt ist.

Daß der leere Raum, wenn er als kontinuierlicher gedacht wird, zugleich inkonsekutiv ist, folgt ohne weiteres daraus, daß Konsekution notwendigerweise getrennte Teile voraussetzt, ein kontinuierlicher Raum demnach nicht konsekutiv sein könne, also inkonsekutiv sein müsse, und es ist leicht einzusehen, daß dasselbe auch für den reellen Raum gilt, wenn er als kontinuierlicher gedacht wird. Daß der leere Raum aber, wenn er als diskreter gedacht wird, sowohl konsekutiv als inkonsekutiv sein kann, läßt sich nicht auf den ersten Blick einsehen. Denn auf den ersten Blick scheint es, daß derselbe nur inkonsekutiv sein könne, da der zwischen zwei konsekutiv vorausgesetzten leeren Punkten notwendigerweise liegende Zwischenpunkt wiederum nur leer sein zu können scheint und demnach zwischen ihm und den beiden ersten Punkten wiederum leere Zwischenpunkte liegen müssen usw. in infinitum, so daß der leere diskrete Raum nur als inkonsekutiver gedacht werden zu können scheint. Dem ist aber nicht so. Denn der zwei leere Punkte des leeren konsekutiven Raumes trennende Zwischenpunkt ist nicht mehr als leer in demselben Sinne zu denken, in dem diese letzteren als solche gelten. Die leeren Punkte des leeren Raumes sind nur in dem Sinne leer zu nennen, daß sie letzte Teile des reinen „leeren" Seinsinhalts, des eben eine besondere wunderbare „leere" Wirklichkeitsart darstellenden leeren Raumes sind, nicht aber in dem Sinne, daß sie überhaupt keinen wirklichen Wert resp. Inhalt besitzen, in welchem Falle sie ja mit dem absoluten Nichts identisch wären und das absolute Nichts eben gar nichts ist, also auch nichts Räumliches darstellen kann. Dagegen sind die „leeren" Zwischenpunkte zwischen diesen „leeren" Mittelpunkten überhaupt mit keinem wirklichen Inhalt mehr erfüllt, sie sind in absolutem Sinne als Nichts zu betrachten, sie sind eben bloße Trennungsgrenzen der leeren Mittelpunkte, sie bedeuten eben das bloße unmittelbare Außereinandersein der nebeneinander bestehenden leeren einfachen Mittelpunkte, sind also ein bloßes Verhältnis und kein wirklicher Inhalt. Als solche sind sie keine Punkte im eigentlichen Sinne, son-

hang mit S. 138. Über die allgemeine Möglichkeit des einfachen Raumpunktes hat treffende Bemerkungen B. Russel in dessen «Principles of Mathematics», vol. I, 1903, gemacht.

dern einfache Raumdistanzen, die ihrer geometrischen Natur nach von den leeren Mittelpunkten eben toto genere verschieden sind.

Dieser Sachverhalt wird noch viel einleuchtender bei dem reellen diskreten Raume. Der zwei reelle, sich unmittelbar miteinander berührende Mittelpunkte trennende Zwischenpunkt ist nicht „leer" in demselben Sinne zu nennen, in dem dies von dem leeren Mittelpunkte des leeren Raumes nach dem Obigen gilt. Denn wäre er in diesem Sinne leer, dann hätten wir statt des reellen Raumes, bei dem Raum und Materie (Seinsinhalt) miteinander zusammenfallen, in Wahrheit einen leeren Raum, in dem die diskrete reelle Materie lückenlos verteilt ist, der irreelle Zwischenpunkt kann demnach in dem reellen Raume nur als absolutes Nichts betrachtet werden, das gar keinen Wirklichkeitsinhalt irgendeiner Art darstellt. Ist dem nun aber bei dem reellen Raume so, dann ist es klar, daß dasselbe auch für den leeren konsekutiven Raum gilt, daß also unser obiger Nachweis der Möglichkeit desselben auf Wahrheit beruht.

Wie man also hieraus sieht, ist ein konsekutiver diskreter Raum gar nicht so unmöglich, wie das gewöhnlich hingestellt wird. Ich will mich hier nicht näher in die Diskussion seiner logischen Möglichkeit hineinlassen, will aber ausdrücklich hervorheben, daß die Grundschwierigkeit, die in dem Begriffe des diskreten konsekutiven Raumes liegt — daß nämlich der irreelle Zwischenpunkt eine leere einfache nichtseiende Lücke darstellt —, rein metaphysischer Natur ist und die allgemeine mathematische Möglichkeit desselben gar nicht tangiert. Denn obgleich der irreelle Zwischenpunkt, der zwischen zweien Mittelpunkten eines solchen Raumes liegt, auf Grund tieferer logischer Gründe notwendigerweise als eine leere, einfache, nichtseiende Lücke betrachtet werden müsse, so sind doch alle diese Gründe schließlich rein metaphysischer Natur, die man deshalb gelten lassen kann, aber ebensogut bestreiten kann.[1] Damit ist aber die allgemeine logische Möglichkeit

[1] Die Grundschwierigkeit, die in dem Begriffe des diskreten konsekutiven Raumes liegt, daß der irreelle Zwischenpunkt in demselben nämlich notwendigerweise eine leere einfache nichtseiende Lücke darstellen muß, ist offenbar rein metaphysischer Natur. Denn nur wenn man behauptet (vgl. weiter im Texte), daß zwei Punkte sich nicht absolut unmittelbar miteinander berühren können, ohne miteinander zusammenzufallen, ist diese Schwierigkeit vorhanden, diese Behauptung ist aber eine aus dem letzten Wesen des Punktes sich ergebende, also metaphysischer Art. Man vergl. über die obige Grundschwierigkeit „Prinzipien der Metaphysik ꝛc.", S. 255—256.

des diskreten konsekutiven Raumes gar nicht in Frage gestellt, wie ich dies hier nachweisen will.

Als Hauptgrund für die Behauptung, der irreelle Zwischenpunkt des konsekutiven Raumes müsse eine leere, einfache, nichtseiende Lücke darstellen — die als solche notwendigerweise durch besondere außerhalb dieses Raumes liegende reelle Punkte, die reellen Negationsakte, erfüllt werden muß —, habe ich in meinem Werke die Notwendigkeit, daß ihre Größe in geometrischem Sinne = 1 sein müsse, angeführt. In meinem Aufsatze „Über die Größe der unmittelbaren Berührung zweier Punkte. Beitrag zur Begründung der diskreten Geometrie“[1] habe ich dann für diese letztere Behauptung und damit indirekt für die erstere als Hauptgrund angeführt, daß, wenn die Größe der unmittelbaren Berührung zweier Mittelpunkte = 0 wäre, dann diese letzteren sich notwendigerweise als Ganze miteinander berühren und demnach miteinander zusammenfallen müßten. Man kann nun sowohl diesen letzteren Grund unserer grundlegenden Behauptung, daß die Größe des irreellen Punktes in geometrischem Sinne = 1, dagegen die Größe des reellen (resp. „leeren“) Punktes im diskreten konsekutiven Raume in geometrischem Sinne = 0 sein müsse, bestreiten, wie die obige Folgerung aus der letzteren, daß nämlich der irreelle Zwischenpunkt eine leere, einfache, nichtseiende Lücke darstellt. Denn man kann behaupten, daß zwei reelle Punkte, auch wenn sie sich absolut unmittelbar berühren, d. h. wenn der irreelle Zwischenpunkt zwischen ihnen in absolutem Sinne gar nichts ist, doch zwei solche bleiben können, daß sie sich wohl als Ganze miteinander berühren (da bei Punkten nur eine solche Art und Weise der Berührung denkbar ist), doch aber außereinander bleiben, und demnach distinkte Raumpunkte sein können.[2] Das ist das Erste. Zweitens aber kann, obgleich auf diese Weise der irreelle Zwischenpunkt in qualitativem Sinne absolutes Nichts ist (d. h. keine leere, einfache, nichtseiende Lücke darstellt), doch seine geometrische Größe ganz gut = 1 sein. Und zwar folgt dies Zweite unmittelbar aus dem Ersten. Denn setzt man einmal voraus, daß

[1] Ersch. in Ostwalds „Annalen der Naturphilosophie“, IV. Bd., 2. H.

[2] In diesem Falle müßte man entweder die Möglichkeit der intensiven Quantität bestreiten, da man dann für zwei Punkte, die sich miteinander unmittelbar berühren, notwendigerweise behaupten müßte, daß sie auseinander sind, oder man müßte für die an einem und demselben Raumorte sich befindenden einander durchdringenden Raumpunkte behaupten, sie berühren sich miteinander nicht.

zwei Mittelpunkte, auch wenn sie sich in absolutem Sinne unmittelbar miteinander berühren[1], zwei distinkte Raumpunkte sind, so ist damit eo ipso gesagt, daß auch die geometrische Größe des irreellen Zwischenpunktes = 1 ist, da dann der irreelle Zwischenpunkt eben die einfachste Raumdistanz zweier Mittelpunkte darstellt und in diesem Sinne die Einheit dieser Distanz ist. So wie die Größe des Mittelpunktes, trotzdem daß seine Größe in qualitativem Sinne = 1 ist, in geometrischem Sinne = 0 beträgt, weil der Mittelpunkt als solcher noch keinen Raum darstellt, sondern der Raum erst mit dem Außereinander zweier solcher gegeben ist, ebenso muß umgekehrt die Größe des irreellen Zwischenpunktes in geometrischem Sinne = 1 gesetzt werden, weil derselbe eben die Extension, die Distanz, das Räumliche des konsekutiven Raumes darstellt, obgleich dessen Größe in qualitativem Sinne = 0 ist.[2] So also bietet der Begriff des konsekutiven diskreten Raumes auf dem Standpunkte der formellen Mathematik, den wir hier einnehmen, gar keine logischen Schwierigkeiten und ist in demselben Sinne als logische Möglichkeit zu betrachten, in dem dies von den von der Mathematik bisher einzig und allein als „logische" Möglichkeiten zugelassenen Raumformen des inkonsekutiven kontinuierlichen und diskreten Raumes gilt. Der diskrete Mathematiker (d. h. der Vertreter des konsekutiven diskreten Raumes) braucht sich also um die letzten logischen Schwierigkeiten des Begriffs des diskreten konsekutiven Raumes ebensowenig zu kümmern[3],

[1] In absolutem Sinne sich berühren, heißt sich so berühren, daß es gar keine nichtseiende Lücke gibt, die die sich berührenden Punkte voneinander trennte. In diesem Sinne müßten sich die realen Negationspunkte mit den entsprechenden Raumpunkten, die sie trennen, berühren. Man vergl. darüber „Prinzipien der Metaphysik rc.", S. 271—273.

[2] Man vergl. darüber „Prinzipien der Metaphysik rc.", S. 251—253.

[3] Und dies um so weniger, da, wie gesagt, diese Schwierigkeiten rein metaphysischer Natur sind. Man könnte nämlich ganz gut behaupten, daß zwei reale Punkte, auch wenn sie sich absolut unmittelbar miteinander berühren, nicht räumlich zusammenfallen werden, denn wenn dies für zwei Raumpunkte gälte, müßte es mit demselben Rechte auch für den realen Negationsakt einerseits und jeden einzelnen der zwei durch ihn getrennten Raumpunkte gelten. Als Metaphysiker halte ich aber doch an meiner ursprünglichen Behauptung fest, daß der irreelle Zwischenpunkt eine leere einfache nichtseiende Lücke darstellt, die nur durch die Voraussetzung des realen Negationsaktes als solche reell bestehen kann, indem ich zwar anerkenne, daß zwei Punkte, die sich absolut unmittelbar miteinander berühren, wohl nicht in räumlichem Sinne miteinander zusammenfallen,

wie sich der kontinuierliche Mathematiker (d. h. der Vertreter des inkonsekutiven kontinuierlichen und diskreten Raumes — man vergl. über diese Ausdrücke auch den zweiten Abschnitt) um die letzten logischen Schwierigkeiten der von ihm vorausgesetzten Raumformen nicht kümmert.[1]

Was schließlich das Verhältnis der Prädikate des Unendlichen und des Endlichen zum leeren oder reellen Raume und zu den übrigen Prädikaten betrifft, so läßt sich leicht einsehen, daß sowohl der leere wie der reelle Raum sowohl unendlich wie endlich gedacht werden können. Ein kontinuierlicher Raum muß nun notwendigerweise unendlich sein, weil er ja notwendigerweise inkonsekutiv und der inkonsekutive Raum notwendigerweise unendlich sein müsse (denn es ist in einem solchen Raume zwischen zwei Punkten immer ein dritter und

---

d. h. auseinander sind (denn sonst könnte der Negationsakt nicht außerhalb der realen Raumpunkte sein), andererseits wieder bin ich (als Metaphysiker) noch immer der Meinung, daß zwei solche Punkte keine räumliche Strecke bilden können, weil diese notwendigerweise eine bestimmte Richtung darstellt, die einfachen Punkte aber, wenn sie sich als Ganze berühren, offenbar keine verschiedenen Seiten und Richtungen in bezug aufeinander haben können, ihr Außereinandersein also als ein ganz unräumliches gedacht werden muß. Wie man aber hieraus sieht, sind alle diese Gründe und Gegengründe rein metaphysischer Art und tangieren die allgemeine mathematische Möglichkeit des konsekutiven Diskretums gar nicht.

[1] Denn die letzten logischen Schwierigkeiten dieser letzteren Begriffe sind mit nichten kleiner als diejenigen des konsekutiven Diskretums. Wenn man in dem räumlichen Außereinandersein zweier sich berührenden Punkte einen unmittelbaren Widerspruch findet, so kann man in dem Begriffe eines aus ungetrennten Teilen bestehenden Raumes ebenso einen unmittelbaren Widerspruch finden, da ungetrennt und außereinander mindestens in eben demselben Grade einander ausschließen, wie dies für das Sich-Berühren und Außereinandersein gelten soll. Und ein analoger Widerspruch läßt sich in dem Begriffe des aus einfachen Punkten bestehenden inkonsekutiven Raumes finden: denn einfache Punkte voraussetzen, die reell bestehen, und die sich doch nicht unmittelbar miteinander berühren, sondern immer zwei von denselben durch einen dritten dazwischenliegenden getrennt sind, heißt das nicht einen noch größeren Widerspruch statuieren, als es diejenigen der beiden ersten Fälle sind? Denn die einfachen Punkte, die reell, d. h. getrennt voneinander im Raume bestehen und dies doch nur durch die dazwischenliegenden Punkte tun, solche einfachen Punkte sind in Wahrheit gar nicht voneinander getrennt, denn sie sind immer wiederum durch Punkte getrennt, die wiederum durch Punkte getrennt sein sollen usw. in infinitum, was offenbar einen logischen progressus in infinitum bedeutet, also einen Widerspruch. Wie man also sieht, sind die letzten logischen Schwierigkeiten aller drei grundlegenden Raumformen mindestens gleich schwer.

demnach eine unendliche Menge von Punkten vorhanden). Ein diskreter Raum kann dagegen sowohl unendlich wie endlich gedacht werden: wenn er inkonsekutiv ist, dann ist er notwendigerweise unendlich, wenn er aber konsekutiv ist, dann kann er offenbar sowohl unendlich wie endlich sein, da man sich eine endliche Anzahl von konsekutiven Punkten ganz ebenso denken kann, wie man sich eine unendliche Anzahl von solchen (formell) denken kann.

Wir wollen nunmehr die gewonnenen Resultate über das Verhältnis der möglichen Prädikate eines Raumes in folgenden acht Schemen anschaulich darstellen.

I. Der leere Raum kann
- 1. der Teilung nach { a) kontinuierlich / b) diskret } sein
- 2. der Sequenz nach { a) inkonsekutiv / b) konsekutiv } sein
- 3. der Zahl nach { a) unendlich / b) endlich } sein.

II. Der reelle Raum kann
- 1. der Teilung nach { a) kontinuierlich / b) diskret } sein
- 2. der Sequenz nach { a) inkonsekutiv / b) konsekutiv } sein
- 3. der Zahl nach { a) unendlich / b) endlich } sein.

III. Der kontinuierliche Raum kann
- 1. der Realität nach { a) leer / b) reell } sein
- 2. der Sequenz nach { inkonsekutiv } sein
- 3. der Zahl nach unendlich sein.

IV. Der diskrete Raum kann
- 1. der Realität nach { a) leer / b) reell } sein
- 2. der Sequenz nach { a) inkonsekutiv / b) konsekutiv } sein
- 3. der Zahl nach { a) unendlich / b) endlich } sein.

V. Der inkonsekutive Raum kann
1. der Realität nach
   - a) leer
   - b) reell
   sein
2. der Teilung nach
   - a) kontinuierlich
   - b) diskret
   sein
3. der Zahl nach unendlich sein

VI. Der konsekutive Raum kann
1. der Realität nach
   - a) leer
   - b) reell
   sein
2. der Teilung nach diskret sein
3. der Zahl nach
   - a) unendlich
   - b) endlich
   sein.

VII. Der unendliche Raum kann
1. der Realität nach
   - a) leer
   - b) reell
   sein
2. der Teilung nach
   - a) kontinuierlich
   - b) diskret
   sein
3. der Sequenz nach
   - a) inkonsekutiv
   - b) konsekutiv
   sein.

VIII. Der endliche Raum kann
1. der Realität nach
   - a) leer
   - b) reell
   sein
2. der Teilung nach diskret sein
3. der Sequenz nach konsekutiv sein.

Aus diesen Schemen folgt nun ohne weiteres, daß nur folgende acht Raumformen als formell möglich zuzulassen sind:

I. Der Raum kann 1. leer, 2. kontinuierlich, 3. inkonsekutiv und 4. unendlich sein.

II. Der Raum kann 1. reell, 2. kontinuierlich, 3. inkonsekutiv und 4. unendlich sein.

III. Der Raum kann 1. leer, 2. diskret, 3. inkonsekutiv und 4. unendlich sein.

IV. Der Raum kann 1. reell, 2. diskret, 3. inkonsekutiv und 4. unendlich sein.

V. Der Raum kann 1. leer, 2. diskret, 3. konsekutiv und 4. unendlich sein.

VI. Der Raum kann 1. reell, 2. diskret, 3. konsekutiv und 4. unendlich sein.

VII. Der Raum kann 1. leer, 2. diskret, 3. konsekutiv und 4. endlich sein.

VIII. Der Raum kann 1. reell, 2. diskret, 3. konsekutiv und 4. endlich sein.

Wie man also sieht, haben wir unter diesen acht formell möglichen Raumformen vier leere und vier reelle, zwei kontinuierliche und sechs diskrete, vier inkonsekutive und vier konsekutive und schließlich sechs unendliche und zwei endliche Raumformen. Die erste und die achte bilden vollständige Gegensätze zueinander, da jedes Prädikat der einen das direkte Gegenteil des entsprechenden Prädikats der anderen ist, während die übrigen sechs Übergangsformen zwischen diesen beiden Extremen darstellen. So wichtig nun die Prädikate des Leeren und des Reellen auch sind (insbesondere wären sie dies im Falle, wenn die logische resp. reelle Möglichkeit der obigen Raumformen in Frage stünde), so können wir sie doch in der folgenden Betrachtung der Einfachheit halber auslassen, da sie mit allen übrigen Prädikaten ohne Ausnahme und jedes von ihnen in gleicher Weise kombiniert werden können, so daß, wenn im folgenden von irgendeiner durch die übrigen Prädikate charakterisierten Raumform die Rede ist, man ein für allemal dessen eingedenk sein muß, daß eine solche stets entweder als leer oder als reell zu denken ist. Es bleiben also für die nachfolgende Betrachtung nur die drei übrigen Gesichtspunkte maßgebend und von den acht obigen Raumformen verbleiben also nur vier übrig, die zu berücksichtigen sind.

Wenn wir nun dabei von dem Gesichtspunkte der Teilung als dem maßgebenden ausgehen, so haben wir unter diesen vier Raumformen nur eine kontinuierliche, während die übrigen drei diskret sind. Unter diesen vier Raumformen haben wir also 1. ein inkonsekutives unendliches Kontinuum; 2. ein inkonsekutives unendliches Diskretum; 3. ein konsekutives unendliches

Diskretum und 4. ein konsekutives endliches Diskretum. Die bisherige Mathematik hat allein die beiden ersten als die formell möglichen in Betracht gezogen und diskutiert, die beiden anderen dagegen hat sie gar nicht berücksichtigt, obgleich sie, wie man aus dem obigen ersieht, doch ganz ebenso formell möglich sind.[1] Das Versäumte wollen wir nun in dem nächsten zweiten Abschnitte unserer Abhandlung nachholen, indem wir darin die geometrische Struktur all dieser verschiedenen Raumformen untersuchen werden.

[1] Wenn die logische Möglichkeit dieser vier formell möglichen Raumformen in Frage kommt, dann wird der Streit darüber in folgendem Schema seinen adäquatesten Ausdruck finden:

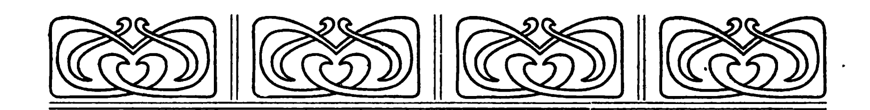
Der Raum ist

kontinuierlich — diskret

diskret: inkonsekutiv — konsekutiv

konsekutiv: unendlich — endlich.

Es wird sich also zunächst darum handeln zu entscheiden, ob der Raum kontinuierlich oder diskret ist. Ist er diskret, dann wird es sich darum handeln zu entscheiden, ob derselbe inkonsekutiv oder konsekutiv zu denken ist, und schließlich, wenn konsekutiv, ob unendlich oder endlich. Im nächsten Abschnitte werden die für diese Raumformen geltenden Geometrien zur Darstellung kommen.



Zweiter Abschnitt.

Die zwei typischen Raumformen und Geometrien und die geometrische Struktur des unendlichen Diskretums.

Daß die erste und die vierte von den obigen vier Raumformen als vollständige Gegensätze nicht eine und dieselbe geometrische Struktur resp. eine und dieselbe Geometrie haben können, ist ohne weiteres klar. Denn der Raum der ersten Raumform ist als absolutes Kontinuum etwas, was als Ganzes seinen Teilen vorausgeht, was nicht aus den Teilen entsteht resp. zusammengesetzt werden kann, vielmehr sind die einzelnen Raumteile in einem solchen Raume nur als (fiktive) Einschränkungen des einen ganzen Raumes denkbar: ein solcher Raum ist ein Totum, kein Kompositum. Dagegen ist der Raum der vierten Raumform etwas, was aus der Zusammenfügung aus seinen einfachen Teilen, den Raumpunkten, entsteht, hier gehen also die Teile dem Ganzen voraus: ein solcher Raum ist also ein Kompositum, kein Totum. Aus diesem Gegensatze folgt mit einleuchtender Notwendigkeit, daß sich in dem kontinuierlichen Totum alle geometrischen Figuren (Figuren im allgemeinsten Sinne eines Raumgebildes überhaupt verstanden) denken lassen, die überhaupt denkbar sind, dagegen werden in dem diskreten endlichen Kompositum offenbar nur diejenigen geometrischen Figuren sich denken lassen, die aus der Zusammenfügung von einfachen Raumpunkten, die sich unmittelbar miteinander berühren (resp. konsekutiv sind), entstehen können. Daß sich auf diese Weise nicht alle die überhaupt denkbaren geometrischen Figuren erzeugen lassen, daß vielmehr nur eine äußerst beschränkte Anzahl von solchen als möglich zurückbleibt, habe ich an einer anderen Stelle strenge mathematisch gezeigt[1] und will hier nur die Haupt-

[1] In meinem oben erwähnten Werke „Prinzipien der Metaphysik ꝛc.“ und insbesondere in dem die systematische Darstellung der diskreten Geometrie (über

resultate, die sich mir in dieser Hinsicht ergaben, hier mitteilen. In dem endlichen Diskretum sind:

I. alle krummen geometrischen Figuren ausgeschlossen.[1]

II. Von den geradlinigen Figuren sind:

1. die unregelmäßigen in potentiellem Sinne alle möglich, in aktuellem Sinne hängt ihre Möglichkeit von der Anzahl der Raumpunkte des gegebenen diskreten Raumes ab[2];

2. von den regelmäßigen:

α) in dem zweidimensionalen Raume: a. als einfache nur das Dreieck, das Quadrat, und das Sechseck[3]; b. als zusammengesetzte nur das Dreieck, das Quadrat, das Sechseck und das Zwölfeck möglich, alle anderen unmöglich[4];

β) in dem dreidimensionalen Raume: a) als einfache das Tetraeder, das Hexaeder und das Oktaeder[5]; b) als zusammengesetzte nur das Hexaeder möglich, die anderen dagegen unmöglich[6];

γ) in dem vierdimensionalen Raume: a) als einfache das Pentaeder, das Oktaedroid, das Hexadeka — und das Ikosatetraedroid[7]; b) als zusammengesetzte nur das Oktaedroid möglich, die anderen dagegen unmöglich[8];

δ) in dem n-dimensionalen Raume: a) als einfache das $n+1$ — (d. h. das dem Pentaeder) und das $2n$ — (d. h. das dem

---

diesen Ausdruck vergl. weiter unten) enthaltenden Anhang „Elemente der neuen Geometrie". Ich werde im folgenden von nun an beide getrennt zitieren und zwar „Prinzipien der Metaphysik" als „Pr. d. M." und „Elemente der neuen Geometrie" als „El. d. n. G.". Ich bemerke zugleich, daß die Paginierung der beiden in dem Werke nicht getrennt wurde.

[1] „Pr. d. M.", S. 278, 9, und im Zusammenhange damit S. 305, 6.

[2] Dieser Satz ist nirgends ausdrücklich ausgesprochen, ist aber eine unmittelbare Folge der Lehrsätze 11 und 13 im ersten Abschnitt des ersten Teils der „El. d. n. G." (vergl. S. 353—355 und insbesondere die Anmerkung zum Lehrsatze 11, S. 353). Die Tatsache der unregelmäßigen Figuren ist übrigens in Def. 58 (ib. S. 344) inbegriffen. Was hier für den zweidimensionalen Raum gilt, läßt sich leicht auf den drei-, vier- und den n-dimensionalen übertragen.

[3] „El. d. n. G.", S. 351. — [4] „El. d. n. G.", S. 382—385.

[5] „El. d. n. G.", S. 412. — [6] „El. d. n. G.", S. 420.

[7] „El. d. n. G.", S. 437. — [8] „El. d. n. G.", S. 444.

Hexadekaedroid resp. dem Oktaeder entsprechende) Gebilde möglich[1]; b) als zusammengesetzte sind dagegen keine mehr möglich.[2]

Wie man hieraus sieht, ist der diskrete endliche Raum viel ärmer an geometrischen Figuren als der kontinuierliche unendliche. Da sich nun ein einfacherer Raum, als es derjenige ist, der diskret und zugleich endlich ist, nicht denken läßt und da sich ein Raum, der zusammengesetzter d. h. an geometrischem Inhalt reicher wäre, als es derjenige ist, der kontinuierlich und unendlich ist, nicht denken läßt, so sind diese beiden Räume offenbar die typischen Raumformen und die ihnen entsprechenden Geometrien stellen typische Geometrien dar. Daß nun diese Geometrien nicht nur in dem Sinne typisch sind, daß sie Geometrien von zwei ganz eigenartigen einander entgegengesetzten und überhaupt extremen Raumformen darstellen, sondern daß sie dies auch in einem anderen erweiterten Sinne sind, d. h. auch in dem Sinne, daß für jede mögliche Raumform eine dieser beiden Geometrien gelten muß, dies zu zeigen ist die eigentliche Aufgabe dieses zweiten Abschnittes unserer Abhandlung. Da es nun außer diesen beiden extremen Raumformen nur noch zwei solche gibt, die zugleich Übergangsformen zwischen ihnen darstellen und da jede dieser beiden Raumformen ein unendliches Diskretum darstellt, so kann man auch sagen, daß die Untersuchung der geometrischen Struktur des unendlichen Diskretums die eigentliche Aufgabe dieses Abschnitts unserer Abhandlung ist, und wir gehen nunmehr zu derselben über.

Daß für das unendliche inkonsekutive Diskretum die Geometrie des kontinuierlichen Raumes oder kurz die kontinuierliche Geometrie gilt (im Gegensatz zu welcher wir die Geometrie des endlichen Diskretums kurz die diskrete nennen wollen), läßt sich unschwer zeigen. Zunächst ist es klar, daß, obgleich das unendliche inkonsekutive Diskretum ein Kompositum und kein Totum ist, dasselbe sich doch nicht aus der Zusammenfügung von einfachen Raumpunkten zusammensetzen läßt, d. h. dasselbe läßt sich nicht aus konsekutiven unmittelbar aneinander angereihten Punkten erzeugen. Ein Kompositum in eigentlichem Sinne ist es also nicht, ein Kompositum ist es nur insofern, inwiefern es aus getrennten Teilen besteht, also diskret ist, die andere wesentliche Eigenschaft des

[1] „El. d. n. G.“, S. 437.

[2] Da nämlich der n-dimensionale (vollkommen) ausgebreitete, d. h. (vollkommen) zusammengesetzte Raum von n-Dimensionen, wenn $n > 4$ überhaupt unmöglich ist. Vergl. „El. d. n. G.“, S. 434, und die Berichtigung dazu.

Kompositums, die Entstehung aus einfachen Teilen, hat es nicht, da diese Teile nicht konsekutiv sind. Da ihm nun diese andere wesentliche Seite des Kompositums fehlt, die dem endlichen Diskretum eigentümlich und von diesem untrennbar ist, so ist soviel gewiß, daß die Geometrie dieses letzteren oder die diskrete Geometrie, wie wir sie oben der Kürze halber nannten, für dasselbe in ihrem vollen Umfange nicht gelten kann. Denn nur wenn die Punkte derselben konsekutiv wären, könnte man dies letztere behaupten, aber auch dann nicht mit voller Sicherheit und jedenfalls nicht ohne besonderen Beweis. Da aber die Punkte des diskreten Raumes nicht konsekutiv sind, so kann offenbar die diskrete Geometrie in ihrem vollen Umfange nicht mehr gelten und sie könnte dann nur so gelten, wenn ihr geometrischer Inhalt erheblich erweitert würde. Ob nun aber Ähnliches in bezug auf die kontinuierliche Geometrie zu sagen ist, oder ob diese vielmehr nicht uneingeschränkt für ein solches inkonsekutives Diskretum gelten müßte? Wenn nun die kontinuierliche Geometrie für ein solches Diskretum nicht uneingeschränkt gelten sollte, dann würde sie, wie wir gleich sehen werden, für dasselbe überhaupt prinzipiell nicht gelten und es wäre dann die diskrete Geometrie diejenige, die eine solche prinzipielle Geltung in bezug auf dasselbe hätte.

Wo liegt nun der prinzipielle Punkt, der die kontinuierliche Geometrie von der diskreten scheidet? Er liegt in der Tatsache der krummen geometrischen Figuren. Denn daß diese in einem aus inkonsekutiven Teilen bestehenden Raume möglich sind, folgt ohne weiteres aus der Definition einer krummen Linie hervor[1] (da jedes krumme geometrische Gebilde notwendigerweise krumme Linien enthalten muß), als einer Linie, in der es nirgends (mehrere) Punkte gibt, die in einer und derselben Richtung liegen. Denn da in einem solchen Raume stets zwischen zwei Punkten ein dritter und also eine unendliche Menge von solchen liegt, so ist damit die Möglichkeit der krummen Linien ohne weiteres gegeben, denn in einem solchen Raume kann offenbar jeder Punkt einer Linie in einer anderen Richtung liegen, da in einem solchen Raume von einem Punkte aus die verschiedensten Richtungen gegeben sind. In dem endlichen konsekutiven Diskretum sind dagegen die krummen Linien unmittelbar auszuschließen: denn zwar könnten, rein formell genommen, auch in der krummen Linie

[1] Vergl. darüber ausführlicher „Pr. d. M.“, S. 278, 9.

zwei Punkte bestehen, die in einer und derselben Richtung liegen (das sind die sogenannten „im Unendlichen benachbarten“ Punkte), aber die zwei Punkte dürften dann kein Linienstück bilden[1], zwei konsekutive Punkte des endlichen Diskretums bilden aber eo ipso ein Linienstück, nämlich die einfachste Gerade oder die Elementargerade[2], also sind die krummen Linien und die krummen geometrischen Gebilde überhaupt in dem endlichen Diskretum absolut ausgeschlossen. Aus dieser Ausführung folgt, daß, wenn in einem Raume die krummen Linien möglich sind, für denselben die kontinuierliche, und wenn keine solchen möglich sind, die diskrete Geometrie gilt.

Daß nun für den unendlichen inkonsekutiven diskreten Raum die kontinuierliche Geometrie prinzipiell gilt, folgt unmittelbar aus der obigen Ausführung. Denn wenn die Teile eines Raumes inkonsekutiv sind, dann ist die Anzahl dieser Teile zugleich schlechthin unendlich und die beiden Bedingungen zur Existenz der krummen Linien und demnach der krummen geometrischen Gebilde überhaupt sind erfüllt. Dies beides nun trifft auch bei dem inkonsekutiven diskreten Raume zu, also gilt die kontinuierliche Geometrie prinzipiell für denselben. Ob sie nun nicht nur prinzipiell, sondern auch vollständig und uneingeschränkt für denselben gilt? Dies hängt davon ab, ob, der Definition der kontinuierlichen Geometrie gemäß, alle die überhaupt

[1] Jede Kurve, die eine Tangente hat, hat mit dieser (wie sich direkt beweisen läßt) nicht einen, wie dies gewöhnlich behauptet wird, sondern zwei Punkte gemeinsam, nur muß man dabei voraussetzen, daß diese beiden Punkte keine Linie bilden, was sie in dem Kontinuum auch in der Tat nicht zu tun brauchen, da hier zwei Punkte, die sich unmittelbar miteinander berühren (und man muß von den zwei gemeinsamen Punkten der Kurve und ihrer Tangente voraussetzen, daß sie sich unmittelbar miteinander berühren), kein Linienstück zwischeneinander haben können, ihre Distanz also = 0 sein muß. In dem endlichen Diskretum dagegen muß die Distanz zwischen zwei sich unmittelbar berührenden Punkten, wie früher ausgeführt, = 1 sein, zwischen zwei solchen Punkten liegt also ein Linienstück. Da nun eine Kurve nur in einem inkonsekutiven Raume möglich ist, in diesem aber keine konsekutiven Punkte möglich und doch für die zwei gemeinsamen Punkte der Kurve und der Tangente nur das Verhältnis der Konsekution vorausgesetzt werden könne (denn sonst hätte die Tangente unendlich viele Punkte mit der Kurve gemeinsam), so kommen wir damit auf eine Schwierigkeit in dem Unendlichkeitsbegriff, die von prinzipieller Bedeutung ist, auf die wir aber hier nur hinweisen können und nur noch bemerken wollen, daß hier in dieser Schwierigkeit das Geheimnis der Infinitesimalmethode liegt, was wir an einem anderen Orte ausführlich darlegen werden.

[2] „El. d. n. G.“, S. 342, Def. 16 und 17.

denkbaren geometrischen Figuren in dem inkonsekutiven Diskretum ebenso gegeben resp. gedacht werden können, wie dies in bezug auf den kontinuierlichen Raum gilt. Da nun alle die überhaupt denkbaren geometrischen Figuren in dem Kontinuum nur deshalb gedacht werden können, weil darin alle die überhaupt denkbaren krummen Figuren möglich sind — denn diese setzen in letzter Instanz als Bedingungen ihrer Möglichkeit die Unendlichkeit der Richtungen von einem Punkte aus und die unendliche Anzahl der Raumpunkte voraus, und wo unendlich viele Richtungen von einem Punkte aus und wo eine unendliche Anzahl von Punkten gegeben sind (mit jener ersten Bedingung ist die zweite, nicht aber umgekehrt — vgl. darüber noch weiter unten — gegeben), da sind offenbar auch alle die überhaupt denkbaren geradlinigen (und selbstverständlich gemischten geradlinig-krummen) Figuren, also auch alle Figuren überhaupt, möglich —, und da in dem unendlichen inkonsekutiven Diskretum die beiden Bedingungen der krummen Figuren erfüllt sind, so sind offenbar auch darin alle die überhaupt denkbaren Figuren möglich, also gilt die kontinuierliche Geometrie nicht nur prinzipiell, sondern auch uneingeschränkt für denselben.[1] Die modernen Mathematiker, die die Diskretheit des Raumes lehren, haben

[1] Selbstverständlich gilt dies nur solange, solange man die formelle Möglichkeit der nichteuklidischen Raumformen nicht in Betracht zieht. Zieht man dieselbe in Betracht, dann ist es offenbar, daß in jeder einzelnen dieser Raumformen nicht alle die geometrischen Gebilde möglich sind, die in dem allgemeinen euklidischen n- (resp unendlich-) dimensionalen inkonsekutiven Raume denkbar sind (z. B. auf einer Kugelfläche sind viele geometrische Gebilde undenkbar, die in dem dreidimensionalen euklidischen Raum bestehen).

Der allgemeine Gesichtspunkt, von dem aus unsere beiden typischen Geometrien aufgestellt sind, unterscheidet sich von dem allgemeinen Gesichtspunkte, von dem aus die euklidische und die nichteuklidische Geometrie als typische Geometrien aufgestellt worden sind, darin, daß in demselben die letzten elementaren Seiten des Raumes zum Vorschein kommen, während der letztere die Ausdehnungsform des Raumes als Ganzen in Betracht zieht. Im ersten Falle handelt es sich in letzter Instanz um die Art, in der der Raum aus seinen Teilen aufgebaut ist, in dem zweiten Falle dagegen handelt es sich um die Gestalt, in der der Raum als Ganzes in seiner Ausdehnung gegeben ist. Formell genommen sind alle die nichteuklidischen Raumformen verschiedener Dimension (und ebenso euklidische Raumformen verschiedener Dimension) möglich, und deshalb müßte eine umfassende Untersuchung aller typischen Geometrien auch die typischen Geometrien dieser Art in Betracht ziehen. Da nun dies letztere mehrfach getan worden ist, so haben wir in der vorliegenden Abhandlung eine wichtige Ergänzung dieser Untersuchungen der typischen Geometrien liefern wollen, allerdings

also mit ihrer Behauptung recht, daß für denselben die kontinuierliche (oder die geltende) Geometrie uneingeschränkt gilt, da sie denselben zugleich als inkonsekutiven unendlichen Raum auffassen.

---

eine Ergänzung, die mehr als Ergänzung ist, da sie typische Geometrien umfaßt, die viel fundamentaler sind als die bisher berücksichtigten.

Daß sich der Gesichtspunkt unserer Geometrien mit demjenigen der nichteuklidischen mehrfach kreuzt, ist leicht einzusehen. Erstens sind, wie ich dies anderwärts gezeigt habe (vergl. „Pr. d. M.", S. 291), die nichteuklidischen Raumformen in dem diskreten endlichen Raume gar nicht denkbar und, wir fügen hinzu (vergl. darüber weiter unten), sie sind überhaupt in den Räumen, für die die diskrete Geometrie gilt, unmöglich. Prinzipiell möglich sind sie nur in denjenigen Raumformen, für die die kontinuierliche Geometrie gilt und zwar gilt überhaupt die kontinuierliche Geometrie in einer nichteuklidischen Raumform stets eingeschränkt.

Ich muß schließlich noch ausdrücklich bemerken, daß ich in dieser Abhandlung nur von Räumen gesprochen habe, die lückenlos sind, d. h. in denen es keine, sei es ausgedehnte, sei es unausgedehnte Lücken gibt. Zwar müssen, wie ich dies an einem anderen Orte ausführlich dargelegt habe (vergl. „Pr. d. M.", S. 255), die irreellen Punkte im diskreten konsekutiven Raume leere nichtseiende Lücken darstellen, doch sind diese Lücken erstens einfach und zweitens lassen sie sich durch die reellen Negationsakte, die außerräumlich sind, ausfüllen, außerdem können dieselben, wie in dem ersten Abschnitt nachgewiesen, auf dem Standpunkte der reinen Mathematik als nicht bestehend betrachtet werden, so daß der diskrete konsekutive Raum als ein vollkommen lückenloser betrachtet werden könne. Die lückenhaften Räume betrachte ich überhaupt als Räume, die nicht einmal formell möglich sind; denn man kann den Raum nur als eine lückenlose Vielheit (oder sagen wir meinetwegen Mannigfaltigkeit) von Punkten definieren (sei es, daß die Punkte als wirklich gegebene oder fingierte vorausgesetzt werden), so daß, dem Begriffe der formellen Möglichkeit folgend, der lückenhafte Raum als formell unmöglich zu betrachten ist, da derselbe unmittelbar gegen die Definition des Raumes als solche verstößt (Raumlücken würden ausgedehnte oder einfache nichtseiende Ausdehnungen bedeuten und dem absoluten Nichts als solchem kann doch keine Logik Ausdehnung wie überhaupt irgendeine andere dem Realen zukommende Eigenschaft zuschreiben). Nur eine Wissenschaft, die auch die sogenannten logisch unmöglichen Gegenstände in Betracht zöge (wie Meinongs Gegenstandstheorie dies sein will), könnte die lückenhaften Raumformen in ihre Domäne ziehen und wir überlassen es ihr gerne dies zu tun. Das Formell-Mögliche liegt eben an der Grenze zwischen dem Logisch-Möglichen und dem Logisch-Unmöglichen und der reinen Mathematik kann man noch erlauben, sich damit zu beschäftigen, nur muß sie sich dabei vor der Gefahr hüten, das Formell-Mögliche mit dem Logisch-Unmöglichen zu verwechseln. Von diesem letzteren Vorwurfe sind gerade die modernsten Mathematiker nicht freizusprechen (so gilt dies in hohem Maße z. B. für den auch an sonstigen logischen Mängeln leidenden Versuch Dav. Hilberts, die Grundlagen der Geometrie in umfassender Weise zu entwickeln. Vergl. dessen „Grundlagen der Geometrie", 2. Aufl., 1903).

Daß dagegen für den konsekutiven unendlichen diskreten Raum die kontinuierliche Geometrie nicht mehr gilt, daß vielmehr für denselben prinzipiell die diskrete Geometrie, d. h. die Geometrie des diskreten endlichen Raumes gilt, das ist eine Behauptung, die den Vertretern der geltenden Unendlichkeitsmathematik auf den ersten Blick vielleicht sehr paradox erscheinen wird, deren Wahrheit aber unmittelbar aus unserer Ausführung über den prinzipiellen Punkt, der die kontinuierliche Geometrie von der diskreten scheidet, einleuchtet. Denn wenn die Teile resp. die Punkte des Raumes konsekutiv sind, dann ist dieser Raum diskret und bipunktuell, die einfachen Distanzen zwischen zweien sich berührenden Punkten eines solchen Raumes (die irreellen Zwischenpunkte) machen aber, da sie einfache geradlinige Linienstücke bilden, krumme Linien und demnach krumme geometrische Gebilde überhaupt in einem solchen Raume unmöglich. Es ist also unzweifelhaft, daß die diskrete Geometrie für den unendlichen diskreten konsekutiven Raum prinzipiell gilt, und es fragt sich nur, ob sie für denselben ebenso uneingeschränkt, d. h. in ihrem vollen Umfange gilt, wie dies für die kontinuierliche Geometrie in bezug auf das inkonsekutive unendliche Diskretum der Fall ist. Während nun in der Einschränkung der Geltung der kontinuierlichen Geometrie in direktem Sinne die Rede sein kann, d. h. diese Einschränkung hier nicht nur in rein formell-begrifflichem, sondern auch inhaltlichem Sinne gilt, ist dies bei der diskreten Geometrie nicht mehr der Fall, hier bedeutet offenbar die Einschränkung in formell-begrifflichem Sinne eine Erweiterung in inhaltlichem Sinne, da die diskrete Geometrie (d. h. die Geometrie des endlichen Diskretums) in bezug auf den Reichtum an geometrischen Figuren offenbar das Minimum, die kontinuierliche dagegen das Maximum darstellt, jene also nur erweitert, diese verengert werden kann. Während nun bei dem inkonsekutiven Diskretum nur zwei spezielle Raumformen zu unterscheiden sind, je nachdem dasselbe seiner Ausdehnung (und nicht bloß der Anzahl seiner Punkte) nach endlich oder unendlich ist und während diese beiden Formen offenbar eine und dieselbe Geometrie haben, sind in dieser Hinsicht bei dem konsekutiven unendlichen Diskretum im wesentlichen folgende drei spezielle Raumformen zu unterscheiden:

1. Das unendliche konsekutive Diskretum ist nur nach oben unendlich, nach unten dagegen endlich, d. h. es existiert nur das unendlich Große, dagegen kein unendlich Kleines in demselben, oder, anders

ausgedrückt, jede endliche Strecke in diesem Raume besteht aus einer endlichen Anzahl von Punkten. Wir werden diese Raumform kurz das nach oben unendliche konsekutive Diskretum nennen.

2) Das unendliche konsekutive Diskretum ist nur nach unten unendlich, nach oben dagegen endlich, d. h. es existiert nur das unendlich Kleine, dagegen kein unendlich Großes in demselben; jede endliche Strecke in diesem Raume besteht aus einer unendlichen Anzahl von Punkten. Wir werden diese Raumform kurz das nach unten unendliche konsekutive Diskretum nennen.

3) Das unendliche konsekutive Diskretum ist sowohl nach oben wie nach unten unendlich, d. h. es existiert in demselben sowohl das unendlich Große wie das unendlich Kleine; jede endliche Strecke in diesem Raume besteht aus einer unendlichen Anzahl von Punkten. Wir werden diese Raumform kurz das beiderseits unendliche konsekutive Diskretum nennen.

Da wir nun noch das Bestimmt-Unendliche von dem schlechthin Unbestimmt-Unendlichen zu unterscheiden haben, so wird jede dieser drei Hauptformen je zwei Nebenformen haben. Wir wollen nunmehr für jede dieser sechs konsekutiven unendlichen Raumformen untersuchen, ob für jede derselben die diskrete Geometrie uneingeschränkt gilt oder nicht, und zwar werden wir dies zunächst für die drei bestimmt- und dann für die drei unbestimmt-unendlichen Raumformen tun.

Wir kommen nunmehr dazu, dies für die erste einfachste und natürlichste von ihnen allen zu tun, für das nach oben bestimmt-unendliche Diskretum. Es ist nun leicht festzustellen, daß für dieselbe die diskrete Geometrie uneingeschränkt gelten muß. Dies wollen wir zunächst an dem einfachsten Beispiele einer solchen Raumform zeigen, an dem Beispiele einer dreieckigen Ebene. Wie ich an einem anderen Orte ausführlich dargelegt habe, bildet diese das erste und einfachste Beispiel eines Raumes, dessen Dimensionsanzahl > 1 ist, resp. das einfachste Beispiel des zweidimensionalen diskreten Raumes.[1] Die Fig. 1 zeigt den endlichen Teil einer solchen Ebene. Sie besteht aus einfachen gleichseitigen Dreiecken, d. h. aus Dreiecken, deren Seiten einfache Elementargeraden darstellen, da jedes solche einfache Dreieck aus

Fig. 1.

[1] „Pr. d. M.", S. 263, und „El. d. n. G.", S. 377 und 353, 4.

der unmittelbaren Berührung dreier (reellen) Punkte miteinander besteht resp. entsteht. Ob sich nun die innere geometrische Struktur dieser Ebene ändern wird, wenn wir statt der endlichen Anzahl von Mittelpunkten, aus denen sie entsteht, eine unendliche Anzahl von solchen voraussetzen? Offenbar nicht im geringsten. Denn dann wird nicht jede reelle oder imaginäre Gerade (resp. Teilgerade), die in diesem Raume besteht, nur aus einer endlichen Anzahl von Mittelpunkten (resp. den entsprechenden Berührungsentfernungen) bestehen, sondern es wird daneben auch (ganze) Geraden geben, die aus einer unendlichen Anzahl von solchen Punkten und Berührungsentfernungen bestehen, sie werden aber als solche, obgleich unendlich, ihre geometrische Natur als Gerade nicht verlieren. Ob sie dies letztere tun, wenn sie schlechthin unbestimmt unendlich werden, ist eine Frage, die wir später bei Gelegenheit der unbestimmt-unendlichen Raumformen zu entscheiden haben werden, daß sie es aber, solange sie bestimmt unendlich sind, nicht tun, ist ohne weiters klar. Denn, wie ich dies an einem anderen Orte ausführlicher gezeigt habe, kann sich die Gerade in den Kreis solange nicht umwandeln, solange man sich in dem räumlichen Gebiete des bestimmt Unendlichen bewegt, weil dann die Krümmung des Kreises noch immer, wie groß auch der unendlich große Kreisradius geworden ist, eine bestimmte wenn auch unendlich-kleine Größe darstellt.[1] Es kann also die Voraussetzung, die bestimmt-unendlich große diskrete Gerade werde im Unendlichen zum Kreise, nicht gemacht werden. Wäre diese Voraussetzung richtig, dann würde also an der Grenze des nach oben unendlichen konsekutiven Diskretums eine krumme Linie auftreten und die diskrete Geometrie würde offenbar nicht mehr uneingeschränkt für dasselbe gelten, dann würde vielmehr für dasselbe teilweise auch die kontinuierliche Geometrie Geltung haben, wie ja anders auch nicht zu erwarten ist, da eine Erweiterung der diskreten Geometrie offenbar mit ihrer teilweisen Aufhebung identisch ist.

Dasselbe, was hier für das nach oben bestimmt-unendliche konsekutive Diskretum ausgeführt wurde, gilt offenbar auch für das nach unten bestimmt-unendliche konsekutive Diskretum. Denn hier kann von einer Verwandlung der Geraden in den Kreis keine Rede sein, da eine solche Verwandlung nur in dem Unendlich-Großen möglich

[1] „Pr. d. M.", S. 235.

ist, selbst wenn also jede endliche Strecke in dem konsekutiven Diskretum aus einer (bestimmt-)unendlichen Anzahl von Punkten besteht, ist dadurch in ihrer geometrischen Struktur gar nichts geändert, sie bleibt aus konsekutiven Punkten bestehen, für die entsprechende diskrete Raumform muß also die diskrete Geometrie uneingeschränkt gelten.

Gilt sie nun für die beiden ersten Formen des konsekutiven bestimmt-unendlichen Diskretums uneingeschränkt, dann muß sie auch für die dritte uneingeschränkt gelten, da diese ja nur die unterscheidenden Merkmale der beiden ersten in sich vereinigt. Für das bestimmt-unendliche konsekutive Diskretum gilt also die diskrete Geometrie uneingeschränkt.

Ob sie dies aber auch für das unbestimmt-unendliche konsekutive Diskretum tut? Die Antwort auf diese Frage scheint auf den ersten Blick recht schwierig zu sein. Denn wenn wir zunächst die einfachste Form eines solchen Diskretums, diejenige des nach oben unbestimmt-unendlichen eindimensionalen Raumes, in Betracht ziehen, so scheint uns auf den ersten Blick unmöglich zu sagen, ob sich der Kreis — und darauf kommt es offenbar an — in dem Unbestimmt-Unendlichen, wenn dieses konsekutiv-diskret ist (und nicht inkonsekutiv), in die Gerade verwandeln wird oder nicht. Daß sich der Kreis in dem inkonsekutiven nach oben unbestimmt-unendlichen Raume in die Gerade verwandeln wird, daran kann es keinen Zweifel geben, da in diesem Falle, wie ich dies anderwärts gezeigt habe[1] und wie sich das leicht einsehen läßt, die Krümmung des Kreises zur absoluten Null wird. Daraus folgt aber gar nicht, daß sich die Gerade an der Grenze des unbestimmt-unendlichen konsekutiven Diskretums in den Kreis verwandeln wird. Denn bei jener Umwandlung des Kreises in die Gerade in dem inkonsekutiven unbestimmt-unendlichen Raume war eigentlich nicht das Unbestimmt-Unendliche, sondern das Inkonsekutive desselben entscheidend. Das Unbestimmt-Unendliche ist dabei wohl das conditio sine qua non, es ist aber nicht die vollständige Bedingung jener Umwandlung, vielmehr ist das Inkonsekutive die hinzugekommene Bedingung, die dieselbe ermöglicht hat. Denn damit die Krümmung des Kreises zur absoluten Null wird, muß die unendlich-kleine Strecke, die die Distanz des Kreises von der Geraden (als seiner Grenze im

[1] „Pr. d. M.", S. 235.

Unendlichen) darstellt, zur absoluten Null werden können, was sie aber offenbar, wie ich dies anderwärts gezeigt habe[1], in dem konsekutiven diskreten Raume nicht tun kann, weil ja hier zwei konsekutive Punkte in einer Distanz voneinander liegen, die nicht $= 0$ ist. Wenn nun so auch der nach oben unbestimmt-unendliche konsekutive diskrete Raum die geometrische Struktur der diskreten Geometrie uneingeschränkt besitzen muß, dann läßt sich dasselbe leicht auch für die beiden anderen entsprechenden Raumformen des konsekutiven unendlichen Diskretums einsehen.

Was wir nun so indirekt, durch die Betrachtung der Unmöglichkeit der Umwandlung des Kreises in die Gerade in dem unendlichen konsekutiven Diskretum, nachgewiesen haben, daß nämlich für alle möglichen speziellen Raumformen des unendlichen konsekutiven Diskretums die diskrete Geometrie uneingeschränkt gelten muß, können wir auch direkt aus der Natur des konsekutiven Diskretums nachweisen. In dem konsekutiven Diskretum als solchem, wenn von dessen letzten Elementen und ihrer Anordnung ausgegangen wird (vgl. Fig. 1), ist offenbar nirgends ein Kreis zu treffen. Zunächst ist dies unmittelbar einleuchtend für das endliche Gebiet dieser Elemente (mag dieses endliche Gebiet selbst in dem unendlich-kleinen Gebiete des ganzen Raumes liegen), wir haben aber gar keinen Anlaß vorauszusetzen, daß dem anders in dem unendlich großen Gebiete derselben (resp. dem endlichen oder unendlich großen Gebiete des ganzen Raumes) sein wird, da die Elemente offenbar auch in dem Unendlichen absolut dieselben geometrischen Beziehungen zueinander behalten werden. Die Behauptung, daß im Unendlichen die Geraden eines solchen Raumes zu Kreisen werden (und das infolgedessen z. B. die in Fig. 1 dargestellte dreieckige Ebene zu einer geschlossenen unendlich großen Kugelfläche wird), ist eine diesem Raume ganz fremde Betrachtung. Denn nur in einem Raume, in dem der Kreis als Figur besteht, hat es Sinn zu behaupten, derselbe werde im Unendlichen zur Geraden und es müsse deshalb auch umgekehrt jede Gerade eines solchen Raumes im Unendlichen ein Kreis sein. Solange wir uns also streng auf dem Boden des konsekutiven diskreten Raumes aufhalten, haben wir kein Recht, von einer wesentlichen Änderung seiner geometrischen Struktur (die in diesem Falle allerdings nur

[1] „Pr. d. M.“, S. 237 Anm.

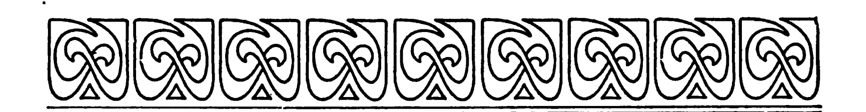
die Gestaltform des Raumes als Ganzen, nicht aber auch seine innere geometrische Struktur betreffen würde) zu sprechen; wenn wir aber andere Räume in Betracht ziehen, in denen entsprechendes möglich ist, dann sehen wir auch ein, daß die wesentlichen Bedingungen, die dies bei ihnen ermöglichen, bei unserem konsekutiven diskreten Raum eben fehlen.

---

[1] Wenn nun so die geometrische Struktur des konsekutiven Diskretums ungeändert bleibt, auch wenn die Anzahl seiner Punkte unendlich ist, so ist also unsere Geometrie mit dem Infinitismus ebenso vereinbar, wie sie dies von vorneherein mit dem Finitismus ist. In meinem Werke habe ich die diskrete Geometrie auf Grund der finitistischen Doktrin entwickelt und will hier die fundamentalen Punkte hervorheben, in denen meine Beweisführungen umgeändert werden müssen, wenn man dieselbe Geometrie auf infinistitischer Grundlage entwickeln will.

In erster Reihe ist es der Lehrsatz 9 im ersten Abschnitt des ersten Teils (vergl. „El. d. n. G.", S. 347), dessen Beweisführung von Grund aus umgestaltet werden muß. Dieser Lehrsatz lautet: „Jeder Punkt in der ursprünglichen ausgebreiteten Ebene berührt sich unmittelbar mit sechs Punkten". Derselbe wird bewiesen aus der Unmöglichkeit einer unendlichen Anzahl der Punkte im Raume (Axiom 2 vergl. „El. d. n. G.", S. 344). Nun, derselbe Lehrsatz läßt sich auch aus den bloßen Richtungsverhältnissen der entsprechenden Berührungsentfernungen führen, wie sich dies leicht zeigen läßt, so daß die Richtigkeit dieses Lehrsatzes unabhängig von dem Finitismus ist.

Weiter ist es dann noch Lehrsatz 59 ebenso im ersten Abschnitt des ersten Teils (ib. S. 382), der, insofern er die Unmöglichkeit des einfachen Fünfecks auf Grund des vorigen Lehrsatzes behauptet, dahin umzuändern ist, daß dieses letztere möglich wird, in welchem Falle dann die Argumentation zum Lehrsatz 1 des zweiten Teiles (ib. S. 382), der die Unmöglichkeit des dreieckigen (resp. tetraedrischen) dreidimensionalen Raumes behauptet, insofern sich dieselbe auf die Unmöglichkeit des einfachen Fünfecks gründet, auf die entsprechenden Entfernungsverhältnisse, die man leicht durch Berechnung feststellen kann, zu stützen ist. Ich muß im Zusammenhang mit diesen Ausführungen ausdrücklich bemerken, daß die Frage der Möglichkeit des einfachen Fünfecks keine prinzipielle Bedeutung für die diskrete Geometrie hat.



Dritter Abschnitt.

Die transfiniten Zahlen und das konsekutive Diskretum.

Nachdem wir nun so nachgewiesen haben, daß das konsekutive Diskretum seine geometrische Struktur nicht ändert, auch wenn die Zahl seiner Punkte unendlich wird, müssen wir nunmehr untersuchen, ob die Anzahl der Punkte in einem solchen Diskretum wirklich unendlich sein könne oder nicht, wir wollen hier also die Möglichkeit der Anwendung der transfiniten Zahlen auf das konsekutive Diskretum untersuchen.

Über transfinite Zahlen sind zwei verschiedene Theorien aufgestellt worden. Die erste von ihnen, diejenige von Cantor, ist strenger, aber auch abstrakter, die zweite von ihnen, diejenige von Veronese, ist weniger strenge, aber anschaulicher und konkreter begründet worden. Wir werden die Anwendung beider Theorien, zuerst derjenigen Cantors und dann derjenigen Veroneses, auf das konsekutive Diskretum untersuchen, wobei sich herausstellen wird, daß die beiden Theorien nicht gar so grundverschieden voneinander sind, wie ihre Urheber dies behaupten, und daß keine von ihnen auf das konsekutive Diskretum anwendbar ist. Da dies auch für die dritte, zwischen ihnen in der Mitte stehende (und, wie wir sehen werden, natürlichste und logischeste) gilt, so wird sich uns daraus als Endergebnis ergeben, daß die Anzahl der Punkte in dem konsekutiven Diskretum nicht unendlich sein könne, woraus wir dann noch wichtige Folgerungen in bezug auf die Ausdehnung nach oben und unten bei den anderen Raumformen ziehen werden.

Die transfinite Zahlenlehre Cantors bildet einen Teil seiner allgemeinen transfiniten Mengenlehre.

Den Kern der transfiniten Mengenlehre Cantors bildet bekanntlich die Lehre von den wohlgeordneten Mengen, auf der die transfinite Zahlenlehre unmittelbar aufgebaut ist. Die wohlgeordneten

Mengen bilden einen Spezialfall der einfach geordneten Mengen. Während in einer einfach geordneten Menge die einzelnen Glieder so geordnet sind, daß zwischen je zwei Elementen derselben eine bestimmte Rangordnung besteht, wonach das eine von ihnen den niedrigeren, das andere den höheren Rang einnimmt, resp. das niedrigere vor dem höherem, das höhere nach dem niedrigeren zu stehen kommt[1], sind die Elemente einer wohlgeordneten Menge noch den folgenden zwei speziellen Bedingungen unterworfen:

1) In jeder wohlgeordneten Menge gibt es ein dem Range nach niederstes d. h. erstes Element.

2) Jedes Element einer wohlgeordneten Menge hat, falls es nicht das höchste ist, ein nächsthöheres d. h. die Elemente der wohlgeordneten Menge sind unmittelbar aufeinanderfolgend oder, anders ausgedrückt, konsekutiv.[2]

Den Ordnungstypus einer einfach geordneten Menge M (wir beschränken uns hier nur auf die einfach geordneten Mengen, da die mehrfach geordneten keine prinzipielle Bedeutung für unsere Untersuchung haben) definiert Cantor als „den Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergibt, wenn wir nur von der Beschaffenheit der Elemente m abstrahieren, die Rangordnung unter ihnen aber behalten“ d. h. der Ordnungstypus, den Cantor mit $\overline{M}$ bezeichnet, ist selbst eine einfach geordnete Menge, deren Elemente aber lauter Einsen sind, die dieselbe Rangordnung untereinander haben wie die entsprechenden Elemente von M, aus denen sie durch Abstraktion hervorgegangen sind.[3] Dieser Definition gemäß wird nun offenbar der Ordnungstypus einer wohlgeordneten Menge, da dessen Elemente aus Einsen bestehen, die von einer ersten Eins anfangend konsekutiv aufeinanderfolgen, eine Zahl darstellen und zwar soll er nach Cantor die sogenannte Ordinalzahl darstellen, da, wie er voraussetzt, die weitere Abstraktion von der Ordnung der Elemente einer einfach geordneten Menge die sogenannte

---

[1] Vergl. G. Cantor, „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ in „Mathematische Annalen“, Bd. 46, § 7, S. 496, und E. Hundington, «The continuum as a type of order» in «Annals of Mathematics», vol. 6, § 12, p. 157.

[2] Cantor, Mathematische Annalen, Bd. 49, § 12, S. 207, und A. Schönfließ, „Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“ im „Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung“, 8. Bd., 2. Heft, S. 36.

[3] Cantor, Math. Annalen, Bd. 46, S. 497.

Kardinalzahl oder Mächtigkeit ergibt (Cantor bezeichnet sie deshalb mit $\overline{\overline{M}}$, wenn M eine einfach geordnete Menge darstellt).[1]

Am einfachsten lassen sich alle diese Begriffe an Zahlen und Zahlmengen selbst illustrieren und zwar wenn jede Zahleinheit durch ihren natürlichsten und im Grunde einzig adäquaten Repräsentanten dargestellt wird, nämlich durch den einfachen Raumpunkt. Dies will ich in der Fig. 2 tun, die uns zugleich später von großer Bedeutung sein

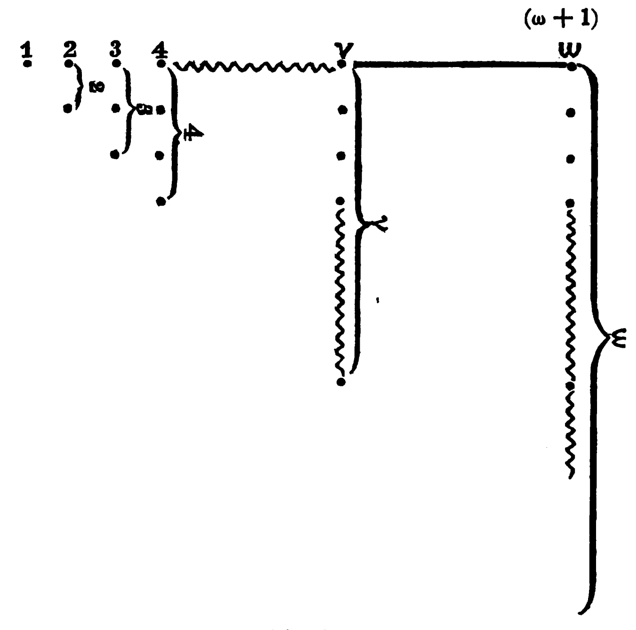


Fig. 2.

wird. Die Vertikalreihen dieser Figur stellen durch ihre Punktmengen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... ν .... ω dar (die Strecke ~~~~ bedeutet das ins Unbestimmte sich ausdehnende Gebiet der endlichen Zahlen, während die Strecke —— den begrifflichen Zusammenhang der Zahl ω mit diesem Gebiet bedeutet). Jede solche vertikale Punktmenge soll nun ein Element der Menge aller dieser Mengen bedeuten. Wie man sieht, stellt diese Gesamtmenge eine wohlgeordnete Menge dar, denn in ihr ist ein erstes mit 1 bezeichnetes Element gegeben und auf jedes, außer dem letzten mit ω bezeichneten, folgt unmittelbar ein nachfolgen-

[1] Ib. S. 498.

des. Abstrahiert man nun in dieser Menge von der Beschaffenheit ihrer Elemente und faßt man jedes von ihnen als eine einfache Eins auf, so läßt sich die durch eine solche Abstraktion gewonnene Menge resp. der Ordnungstypus oder die Ordnungszahl der ersteren als die durch die Horizontalreihe der Fig. 2 dargestellte Punktmenge auffassen, und wir gelangen so zu einer völlig klaren anschaulichen Darstellung der Ordinalzahl einer wohlgeordneten Menge.

Da sich nun bei einer endlichen Menge (und jede endliche einfach geordnete Menge ist zugleich, wie leicht einzusehen ist, eine wohlgeordnete Menge) der Ordnungstypus derselben nicht ändert, man möge die gegenseitige Stellung ihrer Elemente wie immer ändern, so entspricht einer und derselben endlichen Kardinalzahl stets eine und nur eine endliche Ordinalzahl. Dagegen ändert sich der Ordnungstypus einer unendlichen Menge, wenn ihre Elemente in eine veränderte Stellung zueinander zu stehen kommen[1], so daß einer und derselben unendlichen Kardinalzahl (die Kardinalzahl ist ja ihrer Definition gemäß von der Ordnung der Elemente unabhängig) unendlich viele Ordinalzahlen entsprechen. Alle die unendlich vielen transfiniten Ordinalzahlen, die zu einer und derselben transfiniten Kardinalzahl gehören, bilden ein einheitliches zusammenhängendes System oder eine transfinite Zahlenklasse. Und zwar bilden alle die unendlich vielen transfiniten Ordinalzahlen, die aus der kleinsten von ihnen, welche die Gesamtheit aller endlichen Ordinalzahlen darstellt und die Cantor mit ω bezeichnet, hervorgehen und welche der Mächtigkeit der Gesamtheit aller endlichen Ordinalzahlen (oder der Mächtigkeit von ω) entsprechen, die erste transfinite Zahlklasse oder die Zahlenklasse II [die Zahlenklasse (I) umfaßt die endlichen Ordinalzahlen]. So sollen weiter alle die unendlich vielen Ordinalzahlen, die der Mächtigkeit der Gesamtheit aller Zahlen der Zahlenklasse (II) entsprechen, die Zahlenklasse (III) bilden usw. in infinitum. Schließlich sollen alle die überhaupt

[1] Der Ordnungstypus einer Menge wird nach Cantor nicht geändert, wenn ihre Elemente bei ihrem Ortswechsel nur solche Umformungen erfahren, welche sich auf eine endliche oder unendliche Folge von (gegenseitigen) Transpositionen von je zwei Elementen zurückführen lassen. Bei einer (bestimmten) endlichen Menge sind die entsprechenden Umformungen stets von dieser Art, so daß der Ordnungstypus einer endlichen Menge stets ungeändert bleibt. Bei den unendlichen Mengen ist dies nicht mehr der Fall und daher die entsprechende Änderung des Ordnungstypus; vergl. Cantors „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten" in „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik", Bd. 91, S. 96, 7.

denkbaren endlichen und transfiniten Ordinalzahlen, ihrer Größe nach geordnet, eine letzte wohlgeordnete Menge, die sogenannte Menge W bilden, die aber nach Cantor keinen Ordnungstypus und demnach keine Mächtigkeit mehr besitzen soll.

Nachdem wir uns so mit dem Wesentlichen und für unsere Untersuchung Unentbehrlichen aus der transfiniten Zahlenlehre Cantors bekannt gemacht haben, wollen wir nunmehr die Möglichkeit der Anwendung derselben an das konsekutive Diskretum untersuchen. Wir werden dies an der ersten einfachsten Form desselben, an dem nach oben unendlich sein sollenden Diskretum, vornehmen, weil sich die daran gewonnenen Resultate sehr leicht auch auf die übrigen Formen übertragen lassen. Das einfachste Beispiel des nach oben unendlichen konsekutiven Diskretums ist offenbar eine geradlinige Punktenmenge, deren Punktenzahl gleich Cantors ω ist resp. sein soll. Wir stellen sie in der Fig. 3 dar, worin die Strecken ~~~~~~ und ——— die ihnen in der Fig. 2 gegebenen Bedeutungen haben. Da nun eine solche Punktenmenge der Voraussetzung gemäß aus lauter konsekutiven

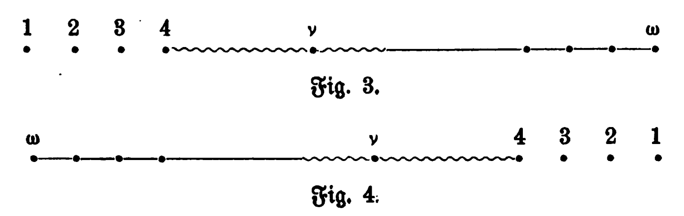


Fig. 3.

Fig. 4.

Punkten besteht, so entspricht jedem einzelnen ihrer Punkte, von dem mit 1 bezeichneten angefangen, eine bestimmte Ordinalzahl aus der wohlgeordneten Menge endlicher Ordinalzahlen 1, 2, 3, 4, ... ν, ..., wie dies aus dem Vergleich der Fig. 3 mit Fig. 2 leicht einzusehen ist. Dem letzten in der Unendlichkeit liegenden Punkte dieser Menge entspricht die kleinste transfinite Ordinalzahl, welche den Ordnungstypus jener Menge aller endlichen Ordinalzahlen darstellt, also die Ordinalzahl ω.

Die geometrische Menge der Fig. 3, die so der arithmetischen wohlgeordneten Menge 1, 2, 3, 4, ... ν, ... ω entspricht, ist offenbar selbst eine wohlgeordnete Menge, da sie in folgenden Eigenschaften mit ihr übereinstimmt: 1) sie hat ein erstes Element, es ist der der Ordinalzahl 1 entsprechende Punkt; 2) jedes ihrer Elemente hat ein ihm unmittelbar nachfolgendes, so wie auf jede endliche Ordinalzahl

eine nächsthöhere resp. nächstgrößere folgt; 3) der der Ordinalzahl ω entsprechende Punkt liegt ebenso außerhalb des Gebiets der den endlichen Ordinalzahlen entsprechenden Punkte, d. h. er liegt in bezug auf den Punkt 1 in unendlicher, während jeder einer endlichen Ordinalzahl entsprechende Punkt in endlicher Entfernung von diesem Punkte liegt, wie die Ordinalzahl ω außerhalb des Gebiets endlicher Ordinalzahlen liegt, d. h. in die Reihe derselben gar nicht hineingehört. Auf Grund dieser drei völlig übereinstimmenden Eigenschaften läßt sich also die geometrische wohlgeordnete Menge der Fig. 3 ganz wohl unter den Begriff der arithmetischen wohlgeordneten Menge 1, 2, 3, 4 ... ν .... ω subsummieren und diese letztere also auf die erstere wenigstens formell ganz tadellos anwenden. Die geometrische wohlgeordnete Menge der Fig. 3 hat aber gewisse Eigenschaften, durch die sie sich von der entsprechenden arithmetischen wohlgeordneten Menge wesentlich unterscheidet, so daß dadurch die Anwendung des Begriffs der letzteren auf die erstere zu Widersprüchen führt, die die transfinite Zahlenlehre Cantors nicht zu überwinden vermag, so daß wir dadurch zu gewissen fundamentalen Umbildungen dieser Lehre genötigt sind, durch die aber die eigentlichen Widersprüche des Unendlichen nur desto offenkundiger zutage treten.

Der erste und zugleich der begrifflich primäre Unterschied zwischen den beiden Arten der wohlgeordneten Mengen besteht darin, daß, während dem höchsten Elemente ω der arithmetischen wohlgeordneten Menge 1, 2, 3, 4, ... ν .... ω (ebenso wie dem ersten Element derselben) kein solches unmittelbar vorausgeht — da es keine größte endliche Ordinalzahl gibt und nach Cantor $\omega - 1$ (resp. $\omega - \nu$ überhaupt) gleich ω sein soll —, dem höchsten Elemente der entsprechenden wohlgeordneten geometrischen Menge der Fig. 3, d. h. dem der Ordinalzahl ω entsprechenden Punkte, unmittelbar ein solcher vorausgeht, da ja diese Menge der Voraussetzung gemäß aus lauter konsekutiven Punkten besteht.

Der zweite aus diesem ersten unmittelbar sich ergebende nicht minder wichtige Unterschied besteht darin, daß, während die Umkehrung der arithmetischen wohlgeordneten Menge 1, 2, 3, 4 ... ν, ... ω, d. h. der entsprechende inverse Ordnungstypus $^*\omega + 1$ unmöglich ist — weil dem Gliede ω in dieser Menge kein Glied unmittelbar vorausgeht[1] —,

[1] Vergl. A. Schönfließ, „Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung", Bd. 8, Heft 2, S. 36.

die Umkehrung bei der entsprechenden geometrischen wohlgeordneten Menge offenbar möglich ist, denn hier geht dem der Ordinalzahl ω entsprechenden Punkte unmittelbar ein anderer Punkt voraus usw. Die Fig. 4 stellt diese Umkehrung der geometrischen Menge der Fig. 3 dar, indem darin der der Ordinalzahl ω entsprechende Punkt der letzteren der Ordinalzahl 1 entspricht und umgekehrt der der Ordinalzahl 1 entsprechende Punkt der Ordinalzahl ω in ihr entspricht. Auf Grund des ersten wesentlichen Unterschieds zwischen der arithmetischen wohlgeordneten Menge 1, 2, 3, 4 .... ν .... ω und der entsprechenden geometrischen wohlgeordneten Menge der Fig. 3 erhebt sich die wichtige Frage, was für einer Ordinalzahl der dem letzten ω-Punkte dieser letzteren Menge unmittelbar vorausgehende Punkt entspricht? Auf diese Frage sind offenbar nur folgende drei Antworten möglich: 1) entweder entspricht dieser Punkt einer von den ω vorausgehenden Ordinalzahlen der obigen wohlgeordneten arithmetischen Menge, also einer endlichen Ordinalzahl; oder 2) dieser Punkt entspricht der Ordinalzahl ω selbst; oder 3) entspricht dieser Punkt einer zwischen den endlichen Ordinalzahlen und der Ordinalzahl ω liegenden Ordinalzahl, also einer von ω kleineren transfiniten Ordidinalzahl.

Die erste Antwort ist an und für sich die natürlichste, weil sie sich unmittelbar aus der vorausgesetzten Natur der geometrischen Menge der Fig. 3 ergibt. Denn der Voraussetzung gemäß soll ja die Anzahl aller dem letzten ω-Punkt dieser Menge vorausgehenden Punkte gleich ω sein, woraus ohne weiteres folgt, daß jeder dieser Punkte ebenso einer endlichen Ordinalzahl entsprechen muß, wie die der Ordinalzahl ω vorausgehenden Ordinalzahlen alle endlich sind. Aber obgleich diese erste Antwort die natürlichste ist, ist sie doch zugleich die unmöglichste, weil sie einen unmittelbaren Widerspruch in sich enthält. Denn wenn der dem ω-Punkte der geometrischen Menge der Fig. 3 unmittelbar vorausgehende Punkt einer endlichen Ordinalzahl entspricht, so bedeutet das nicht mehr und nicht weniger, als daß die Anzahl der dem ω-Punkte vorausgehenden Punkte jener Menge eine endliche ist, woraus folgen müßte, daß die Ordinalzahl ω selbst endlich ist, was ein offenbarer Widerspruch ist.[1] Diese erste Möglichkeit

[1] Dieser Widerspruch entspricht dem sogenannten Widerspruche der unendlichen Zahl, dem ersten Grundwiderspruche des Unendlichen. Vergl. darüber „Pr. d. M.", S. 195.

ist also ganz auszuschließen, wenn Cantors transfinite Zahlenlehre auf das konsekutive unendliche Diskretum widerspruchslos angewandt werden soll.

Die zweite Antwort scheint dagegen die einzige legitime zu sein, wenn man auf dem Boden der transfiniten Zahlenlehre Cantors steht. Denn da die geometrische Menge der Fig. 3 umkehrbar ist, so ist es tatsächlich in bezug auf diese Menge einerlei, ob wir in dem Ausdruck $\omega - 1$, die die nach Wegnahme eines Punktes aus dieser Menge übrigbleibende Menge darstellt, diesen Punkt als den Anfangs- oder als den dem Endpunkte derselben Menge vorausgehenden Punkt (da der Endpunkt selbst nicht zu der Punktmenge gehört) betrachten, so daß also, wenn, wie Cantor behauptet, $\omega - 1 = \omega$ ist, der dem Endpunkte ω in jener Menge unmittelbar vorausgehende Punkt tatsächlich wiederum nur ein ω-Punkt sein könnte (d. h. die Anzahl aller ihm vorausgehenden Punkte würde wiederum ω sein). Auf Grund desselben Arguments müßte dann aber auch der diesem unmittelbar vorausgehende Punkt wiederum ein ω-Punkt sein usw., so daß überhaupt jeder dem Endpunkt ω jener Menge vorausgehende, in endlicher Distanz von ihm sich befindende Punkt wiederum nur ein ω-Punkt wäre.

Solange wir nun bei der geometrischen konsekutiven Menge erster Ordnung verbleiben, liegt kein Widerspruch in dieser Antwort, wenn die Möglichkeit einer solchen unendlichen konsekutiven Menge überhaupt vorausgesetzt wird (was diese hypothetische Einschränkung bedeutet, werden wir erst später sehen). Sobald wir aber eine geometrische konsekutive Menge zweiter Ordnung in Betracht ziehen, führt die Voraussetzung, auf der die zweite Antwort beruht, zu offenkundigen Widersprüchen, die sich (allerdings nur vorläufig) nur durch eine tiefgehende Umbildung der transfiniten Zahlenlehre Cantors vermeiden lassen. Wir betrachten also nunmehr eine geometrische wohlgeordnete Menge, deren letzter, in der Unendlichkeit liegender Punkt der Ordinalzahl $\omega \cdot 2$ entsprechen soll. Die Fig. 5 stellt eine solche Punktmenge dar: die Strecken ～～～～ und ———— haben in dieser Figur die ihnen früher gegebenen Bedeutungen.

Wenn nun die zweite Antwort auf die oben gestellte Frage, resp. deren Voraussetzung, richtig wäre, so ließe sich die Punktenmenge der Fig. 5 überhaupt nicht konstruieren. Die Möglichkeit dieser Punktenmenge steht aber von vorneherein fest. Denn wenn die be-

1 2 3 4 ν ω ω ω ω ω ω ω ω·2 ω·2 ω·2 ω·2

1 2 3 4 ν ω−3 ω−2 ω−1 ω ω+1 ω+2 ω+3 ω·2−3 ω·2−2 ω·2−1 ω·2

Fig. 5.

stimmt unendliche, der Ordinalzahl ω (resp. ω + 1) entsprechende Punktenmenge ein letztes Glied, d. h. einen Endpunkt in der Unendlichkeit hat, dann können diesem Punkte offenbar — und dies ist bei der konsekutiven Raumform um so einleuchtender, da hier kein wesentlicher Unterschied zwischen Anfang und Ende einer unendlichen Strecke besteht — weitere Punkte und also eine unendliche Anzahl von solchen hinzugefügt werden. Steht nunmehr die Möglichkeit einer solchen Punktenmenge von vorneherein fest, so läßt sich leicht zeigen, daß die Grundvoraussetzung ω — 1 resp. ω — ν sei = ω, aus der sich die obige Antwort ergab, sich nicht mehr festhalten läßt, wenn die Punktenmenge der Fig. 5 konstruiert werden soll. Denn wenn jeder in endlicher Distanz von dem letzten der Ordinalzahl ω entsprechenden Punkte der geometrischen Menge der Fig. 3, die offenbar den integrierenden Bestandteil der Punktenmenge der Fig. 5 bilden muß, liegende Punkt ebenso der Ordinalzahl ω entspricht wie ihr letzter Punkt, dann kann, wenn die Punktmenge der Fig. 5 möglich sein soll, offenbar kein diesem letzteren in der Punktenmenge 5 nachfolgende Punkt der Ordinalzahl ω mehr entsprechen, da sie den Ordinalzahlen ω + 1, ω + 2, ω + 3 . . . ω + ν und schließlich ω·2 entsprechen müssen. Ist dem nun so, dann ergibt sich eine merkwürdige Schwierigkeit, die nur durch das Fallenlassen der Grundvoraussetzung, wonach ω — 1 resp. ω — ν gleich ω ist, behoben werden kann. Denn wenn jeder Punkt, der dem letzten Punkte der ersten bestimmt-unendlichen Strecke in der Fig. 5, von mit 1 bezeichneten Punkte angefangen, vorausgeht, ebenso wie dieser der Ordinalzahl ω entspricht, dann kann offenbar jeder dieser Punkte mit gleichem Rechte als der letzte in dieser Menge betrachtet werden, d. h. in der bestimmt-unendlichen Strecke zweiter Ordnung der Fig. 5 gibt es in der mittleren Region keinen bestimmten Punkt, der den letzten Punkt der ersten Menge erster Ordnung und den Anfang der zweiten Menge erster Ordnung in dieser Menge darstellen würde,

was nichts anderes bedeutet, als daß es überhaupt keinen solchen gibt (denn er müßte offenbar ein bestimmter sein), woraus folgte, daß die Punktenmenge der Fig. 5 selbst unmöglich wäre. Man kann dies auch anders und schärfer ausdrücken: ist jeder dem Punkte ω vorausgehende Punkt selbst ein ω-Punkt, so muß auch jeder dem (letzten) ω-Punkt nachfolgende Punkt ein ω-Punkt sein, denn jeder ω-Punkt, dem ein anderer ω-Punkt vorausgeht, ist ja in bezug auf den letzteren selbst ein nachfolgender Punkt, also ist in der mittleren Region der Punktenmenge der Fig. 5 jeder Punkt ein ω-Punkt, ein $\omega + 1$-resp. $\omega + \nu$-Punkt somit unmöglich und diese Punktenmenge selbst als Ganzes unmöglich.

Diese Schwierigkeit läßt sich offenbar nur so beheben, wenn die Grundvoraussetzung, von der wir ausgingen, daß nämlich $\omega - 1$, resp. $\omega - \nu = \omega$ ist, für falsch erklärt wird und also $\omega - 1$, $\omega - 2$, $\omega - 3$, ... $\omega - \nu$, . . . für von ω verschiedene, von ihr kleinere unendliche Zahlen erklärt werden, wie $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, ... $\omega + \nu$, ... von ω verschiedene von ihr größere unendliche Zahlen sind. Wird dies vorausgesetzt, dann verschwindet die obige Schwierigkeit von selbst. Denn dann gibt es in der Punktenmenge der Fig. 5 einen ganz bestimmten Punkt, der das Ende der ersten Menge erster Ordnung und den Anfang der zweiten Menge erster Ordnung darin darstellt, da in der Voraussetzung eines solchen Punktes kein Widerspruch mehr liegt (selbstverständlich ist hier nur von einem ω-Punkte in festgestelltem arithmetischen Sinne die Rede), weil ja dann jeder der ihm vorausgehenden, in endlicher Distanz von ihm sich befindender Punkte einer der Zahlen $\omega - 1$, $\omega - 2$, $\omega - 3$, . . . $\omega - \nu$, ... entspricht und also jeder der ihm nachfolgenden ebenso in endlicher Distanz von ihm sich befindenden Punkte einer der Zahlen $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, $\omega + 4$, ... $\omega + \nu$, ... entspricht und demnach die Punktenmenge der Fig. 5 ganz wohl möglich ist.

So hätten wir also diese Schwierigkeit, die sich aus der Anwendung der transfiniten Zahlen Cantors auf die geometrischen wohlgeordneten Mengen ergibt, durch die Voraussetzung transfiniter Zahlen von der Form $\omega - 1$, $\omega - 2$, $\omega - 3$, ... $\omega - \nu$, ... glücklich überwunden. Um diese letzteren Zahlen zu ermöglichen, müßte nun eine tiefgehende Umbildung der transfiniten Zahlenlehre Cantors vorgenommen werden. Von den beiden Grundvoraussetzungen, auf denen diese Lehre beruht, der Voraussetzung der Ordinalzahl ω

als der Gesamtheit aller endlichen Ordinalzahlen und der Voraussetzung der Gleichheit der Teilmenge einer unendlichen Menge mit dem Ganzen der Menge, muß nämlich diese zweite Voraussetzung fallen gelassen werden, wenn die Möglichkeit der obigen Ordinalzahlen zugelassen werden soll.

Daß nun diese zweite Voraussetzung fallen gelassen werden kann, d. h. daß sie von der ersten Voraussetzung der Zahl ω unabhängig ist, ist leicht nachzuweisen. Ich will dies zunächst an einem Beispiele verdeutlichen. Nehmen wir die Gesamtheit aller endlichen Ordinalzahlen, wie sie, ihrer Größe nach geordnet, die wohlgeordnete Menge von dem Ordnungstypus ω bilden:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots . \nu, \ldots \ldots .$$

und vergleichen sie mit der Gesamtheit aller geraden endlichen Ordinalzahlen, die, ihrer Größe nach geordnet, nach Cantor wiederum eine wohlgeordnete Menge vom Ordnungstypus ω bilden:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots . 2\nu, \ldots \ldots$$

Diese letztere wohlgeordnete Menge soll also nach Cantor dieselbe Anzahl von Elementen wie die erste Menge besitzen, weil jedem Elemente der ersten Menge ein solches in der zweiten Menge entspricht, weil in der unendlichen Menge aller endlichen Zahlen jede Zahl eine zweimal von ihr größere hat. Da aber alle Elemente der zweiten Menge in der ersten Menge auch vorkommen, so bildet sie offenbar eine Teilmenge von ihr, also würde eine Teilmenge dieselbe Anzahl von Elementen enthalten wie die ganze Menge. Wie man hieraus sieht, besteht das Gleichheitskriterium Cantors in bezug auf die Ordinalzahlen (er dehnt dasselbe dann auch auf die Kardinalzahlen aus, was uns hier jedoch noch nichts angeht) in dem *eindeutigen Einanderentsprechen der Elemente zweier unendlichen Mengen nach irgendeinem besonderen Verhältnis in dem diese Elemente zueinander stehen.*

Außer diesem Gleichheitskriterium für die unendlichen Mengen nun läßt sich aber offenbar noch ein anderes mit ebensolcher Berechtigung denken. Daß die zwei obigen unendlichen Mengen im Sinne Cantors einander gleich (resp. ähnlich) sind, ist unzweifelhaft. Es kann aber die Frage erhoben werden, ob nicht dasjenige Kriterium, demgemäß eine unendliche Menge als Teilmenge einer anderen unendlichen Menge zu betrachten ist oder nicht, ob dieses Kriterium, auf dem ja schließlich dasjenige Cantors, inwiefern dasselbe die Gleich-

heit zwischen dem *Ganzen* und dem *Teile* statuiert, beruht, nicht als Gleichheitskriterium für die unendlichen Mengen dienen könnte? Und tatsächlich kann dasselbe ganz gut als solches gelten. Diesem Kriterium gemäß *würden* zwei *unendliche* Mengen *nur dann gleich sein, wenn sie* (qualitativ) *dieselben Elemente enthalten*, so daß diesem Kriterium gemäß die beiden obigen Mengen *nicht* gleich sein würden, vielmehr wäre die erste Menge doppelt so groß wie die zweite, d. h. die Anzahl der Elemente in der ersten Menge wäre zweimal so groß als die Anzahl der Elemente in der zweiten Menge. Wenn die unendlichen Mengen gezählt werden sollen, müßte, um dieses Gleichheitskriterium anwenden zu können, die qualitative Beschaffenheit der Elemente in Betracht gezogen werden, dies müßte aber gleichsam vor dem Abstraktionsprozeß, durch den die Ordinalzahl im Sinne Cantors entsteht, vorgenommen werden, um festzustellen, ob die beiden Mengen dieselben Elemente enthalten oder nicht, demgemäß sie einander gleich oder verschieden voneinander sind, welche Gleichheit oder Verschiedenheit dann einfach auf die entsprechenden Ordinalzahlen zu übertragen wäre.[1]

[1] Daß man ein solches Gleichheitskriterium für die unendlichen Mengen aufstellen kann, ist mindestens ebenso erlaubt, wie es erlaubt ist, das Gleichheitskriterium Cantors für diese Mengen aufzustellen. Zur Bekräftigung dieser Behauptung berufe ich mich auf Cantor selbst, der in seinem Aufsatze „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten" („Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik", Bd. 91, S. 123, 4) das von ihm aufgestellte Gleichheitskriterium nicht gleichbedeutend mit der Behauptung, „daß den konkreten Mengen M und M′ (wobei M die ganze unendliche Menge und M′ eine Teilmenge von ihr bezeichnet) eine und dieselbe Realität zukomme", sein läßt, ja er gibt sogar indirekt die Möglichkeit des zweiten Gleichheitskriteriums zu, indem er sagt, daß „der alte, so oft wiederholte Satz: «Totum est majus sua parte» ohne Beweis nur in bezug auf die, dem Ganzen und dem Teile zugrunde liegenden *Entitäten* zugestanden werden" darf. Mehr als dies will aber auch unser Gleichheitskriterium nicht: statt die eindeutige Zuordnung der Elemente einer unendlichen Menge und ihrer Teilmenge zum Gleichheitskriterium der unendlichen Mengen zu machen, können wir ja, um in Übereinstimmung mit den endlichen Mengen zu bleiben (bei denen überhaupt beide Gleichheitskriterien zusammenfallen), das Verhältnis des Enthaltenseins derselben Elemente in ihnen (oder der Realität in Cantors Sprache) zu einem solchen Kriterium machen, wie dies auch tatsächlich von Veronese in seiner transfiniten Zahlenlehre (dargestellt in seinem großen Werke «Fondamenti di Geometria» — dessen Übersetzung unter dem Titel „Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen" von A. Schepp, Leipzig 1894 erschienen ist) getan worden ist. Da Cantor, wie aus seinen obigen Ausführungen erhellt, die Möglichkeit dieses von dem seinigen abweichenden Gleichheitskriteriums implizite zugibt, so ist es um so mehr zu

Wie man hieraus sieht, ist das Gleichheitskriterium Cantors eine spezielle Annahme, die sich von seiner ersten Voraussetzung der Zahl ω ganz gut trennen läßt und dies um so mehr, da ja das Enthaltensein derselben Elemente das einzige denkbare Kriterium zur Entscheidung der Frage, ob eine unendliche Menge Teilmenge einer anderen ist oder nicht, bildet und ohne dasselbe Cantors Kriterium selbst überhaupt undenkbar wäre, da man ja die Elemente zweier Mengen nur nach einem besonderen Zuordnungsgesetz einander zuordnen kann, ein solches Gesetz aber ohne Rücksicht auf die qualitative Beschaffenheit der Elemente undenkbar ist.

Wird nun so das Gleichheitskriterium Cantors fallen gelassen und dasjenige Veroneses (vergl. die vorige Anmerkung) an seine Stelle gesetzt, so werden die Ordinalzahlen von der Form $\omega - 1$, $\omega - 2$, $\omega - 3$, $\omega - 4$, ... $\omega - \nu$ . . . . ganz wohl möglich. Denn diese Zahlen entsprechen dann den wohlgeordneten Mengen

$$2, 3, 4, 5, 6, \ldots \nu \ldots$$
$$3, 4, 5, 6, \ldots \nu \ldots$$
$$4, 5, 6, \ldots \nu \ldots$$
$$5, 6, \ldots \nu \ldots,$$

was aus dem Vergleich dieser Mengen mit der wohlgeordneten Menge

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \nu \ldots$$

hervorgeht. Denn die erste jener Mengen enthält alle Elemente der letzteren außer dem einen (dem ersten), die zweite alle außer zweien

---

verwundern, daß er in den diesbezüglichen Ausführungen Veroneses (vergl. insbesondere § 45 c und § 93, Bem. I, im Zusammenhang mit § 27, Def. I und II, in dem angeführten Werke Veroneses) lauter widersprechende Aufstellungen hat erblicken können (vergl. Cantor, „Mathematische Annalen“, Bd. 46, S. 500 f., und die Antwort Veroneses darauf in derselben Zeitschrift, Bd. 47, S. 427 ff.). Übrigens hat schon Bolzano (vergl. dessen „Paradoxien des Unendlichen“, 2. Aufl. 1889, § 21—24, S. 31 bis 36) den Unterschied beider Gleichheitskriterien klar auseinandergesetzt und sich entschieden für dasjenige Veroneses ausgesprochen, obgleich er in der Anwendung auf Einzelbeispiele dieselben noch nicht genügend zu unterscheiden weiß (so in dem Beispiele auf S. 54, § 33, wo das fehlerhafte Resultat, daß die Größe der Summe aller Quadratzahlen in der natürlichen Zahlenreihe größer als die Summe der ersten Potenzen dieser Zahlen sei, nur dadurch gewonnen wird, daß Bolzano einmal das Cantorsche und dann das Veronesesche Gleichheitskriterium anwendet, während die alleinige Anwendung jedes von diesen beiden Kriterien zu abweichenden Resultaten führt, diejenige des Cantorschen nämlich zur Gleichheit der beiden Summen, diejenige des Veroneseschen zum entgegengesetzten Resultate des Größerseins der Summe erster Potenzen).

(dem ersten und dem zweiten), die dritte alle außer dreien (dem ersten, zweiten und dritten) usw. Sobald also das Gleichheitskriterium Cantors fallen gelassen wird, sind auch unendliche Zahlen, die kleiner als ω sind, möglich. Während ω die Gesamtheit aller endlichen Ordinalzahlen darstellt, stellt ω — 1 die Gesamtheit aller endlichen Ordinalzahlen außer einer, ω — 2 die Gesamtheit aller außer zweien, ω — 3 die Gesamtheit aller außer dreien usw., ω — ν die Gesamtheit aller endlichen Ordinalzahlen außer ν solchen usw.[1] Da es nun keine größte endliche Ordinalzahl gibt, so wird es offenbar auch keine kleinste unendliche Ordinalzahl ω — ν geben, und dieser letzteren Zahlen wird es offenbar nach dem Veronesesschen Gleichheitskriterium ω geben, weil jedes Element der Menge (ω) in der Menge ω — 1, ω — 2, ω — 3, . . . ω — ν . . ., nur mit negativen Vorzeichen, vorkommt.[2]

Dieses letztere Resultat ist nun an und für sich etwas sehr Merkwürdiges: die unendlichen Zahlen von der Form ω — 1, ω — 2, ω — 3, ... ν . . . . werden auf Grund desselben Gleichheitskriteriums, auf Grund dessen die Ordinalzahl ω seine Einzigartigkeit als die kleinste transfinite Ordinalzahl verliert, dieser Zahl untergeordnet, d. h. durch dieselbe gezählt. Die Sache hat aber an sich schließlich nichts Wunderbares, wenn wir bedenken, daß die Ordinalzahl ω begrifflich den Ordinalzahlen von der Form ω — ν vorausgehen muß[3] und in diesem Sinne unter allen transfiniten Zahlen

[1] Da es keine größte endliche Zahl gibt, so ist es klar, daß, rein arithmetisch abstrakt genommen, die von der Zahl ω abzuziehenden endlichen Zahlen dem vorderen Teile der wohlgeordneten Menge (ω) angehören werden, da ein hinterer Teil derselben streng genommen gar nicht existiert. Da aber die geometrische wohlgeordnete Menge (ω + 1) umkehrbar ist, so liegt keine Schwierigkeit der Anwendung dieser Zahlen auf dieselbe.

[2] Gewiß ist diese Behauptung, daß die Anzahl der Zahlen von der Form ω—ν gleich der Anzahl der Zahlen ν ist, parador, wenn man aber nun einmal solche Zahlen zuläßt, dann ist es offenbar, daß ω—ν nie einer endlichen Zahl gleich werden kann, so groß ν auch sein mag, und da es ω-Zahlen von der Form ν gibt, so muß es auch ω-Zahlen von der Form ω—ν geben.

[3] Daß dem wirklich so ist, läßt sich auch folgendermaßen einsehen. Die Zahl ω—1 ist nicht eine Zahl, die der Zahl ω so vorausginge, wie etwa der Zahl 2 die Zahl 1 vorausgeht, denn während 2—1 nur deshalb = 1 ist, weil 2 = 1 + 1, ist ω nicht in demselben Sinne = ω — 1 + 1, sondern, damit die Zahl ω—1 als solche begrifflich möglich werde, ist zuvor der Begriff der Zahl ω nötig. Denn damit die Anzahl aller endlichen Zahlen außer einer begrifflich möglich werde, ist zuvor der Begriff einer

eine Ausnahmestellung einnimmt: sie ist eben die erste transfinite Ordinalzahl, die auf dem direkten Wege aus den endlichen Ordinalzahlen entsteht, und bleibt unter den transfiniten Ordinalzahlen, die auf Grund der beiden bekannten Erzeugungsprinzipe Cantors in dieser direkten Weise entstehen, die kleinste. Cantors transfinite Zahlen im engeren Sinne bleiben also auch dann bestehen, wenn solche von der negativen Form ($\omega - \nu$, $\omega \cdot \nu - \nu$, $\omega^{\nu} - \nu$ usw., da ja, sobald diejenigen von der Form $\omega - \nu$ auch diese anderen höheren möglich sind) zugelassen werden, so daß also die Abzählung der letzteren durch die ersteren nichts Wunderbares mehr an sich hat.

Wir fragen uns nunmehr, ob durch die Einführung der transfiniten Zahlen von der Form $\omega - \nu$ die transfinite Zahlenlehre Cantors zu einer widerspruchslosen Anwendung auf das konsekutive unendliche Diskretum befähigt wird, oder, mit anderen Worten, wir fragen uns, ob die dritte Antwort auf die oben gestellte Frage, welcher Ordinalzahl der dem ω-Punkte der geometrischen Menge der Fig. 3 unmittelbar vorausgehende Punkt entspricht, richtig sei oder nicht? Die Antwort auf diese Frage wollen wir nun mit Hülfe der Fig. 6 geben. Die obere (Ziffern- resp. Buchstaben-) Reihe dieser Figur entspricht der unteren Reihe der Fig. 5 von 1 bis ω, die nach

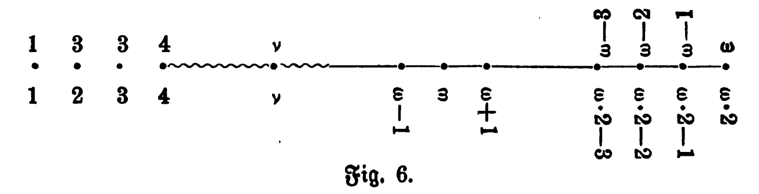


Fig. 6.

unseren bisherigen Ausführungen die richtige Deutung der geometrischen Menge der Fig. 3 darstellt; die untere Reihe dieser Figur entspricht dagegen der ganzen unteren Reihe der Fig. 5 von 1 bis $\omega \cdot 2$, die nach unseren bisherigen Ausführungen die richtige Deutung der Punktenmenge dieser letzteren Figur selbst darstellt (die obere Reihe wurde als in dieser Hinsicht unrichtig ausgelassen). Die Fig. 6 vereinigt

Zahl, die alle endlichen Zahlen umfaßt, notwendig. Dieses Begriffsverhältnis zwischen beiden Zahlenarten rührt schließlich, wie leicht einzusehen, daher, daß die wohlgeordnete Menge, deren Ordnungstypus ω ist, nur ein erstes, aber kein letztes Element hat und daß demnach die Subtraktion von ω gleichsam nur von vorne vollzogen werden kann, so daß die Zahl $\omega - 1$ der Zahl ω in der Zahlenreihe 1, 2, 3, ... ν .... ω, $\omega + 1$ ...., begrifflich genommen, nicht unmittelbar vorausgeht.

somit in sich die Figuren 3 und 5: die darin dargestellte Punktenmenge ist diejenige der Fig. 3 (dies ist durch die obere Reihe ausgedrückt), die Ordinalzahlen aber, durch die die Punkte dieser Punktenmenge abgezählt werden sollen, entsprechen der Punktenmenge der Fig. 5, was eben in der unteren Reihe ausgedrückt ist. Denn daß die Anzahl aller dem ω=Punkte der geometrischen Menge der Fig. 6 (resp. der Fig. 3) vorausgehenden Punkte gleich $\omega \cdot 2$ ist (was in der Figur so angegeben ist, daß unter dem Zeichen ω das Zeichen $\omega \cdot 2$ steht), folgt aus dem oben Ausgeführten, wonach die Anzahl der unendlichen Ordinalzahlen von der Form $\omega - \nu$ gleich ω sein muß, ohne weiters, da die Punkte dieser Menge außerdem noch der ursprünglichen Voraussetzung gemäß allen endlichen Ordinalzahlen entsprechen, deren Anzahl ebenso gleich ω ist. Wie nun die Anzahl aller dem ω=Punkte vorausgehenden Punkte jener Menge gleich $\omega \cdot 2$ ist, ebenso ist nun weiter die Anzahl der dem $\omega - 1$=Punkte dieser Menge vorausgehenden Punkte $\omega \cdot 2 - 1$ (was in der Figur so angegeben ist, daß das Zeichen $\omega \cdot 2 - 1$ unter dem Zeichen $\omega - 1$ steht), — denn die Punktenmenge $(\omega \cdot 2 - 1)$ umfaßt in diesem Falle alle Punkte der Menge $(\omega \cdot 2)$ außer dem Punkte $\omega \cdot 2 - 1$ selbst ($\omega \cdot 2$=Punkt gehört ja der Voraussetzung gemäß nicht in die Punktmenge selbst hinein) — und ebenso ist die Anzahl aller dem $\omega \cdot 2 - 2$ vorausgehenden Punkte gleich $\omega \cdot 2 - 2$ usw., so daß überhaupt die Anzahl der dem $\omega \cdot 2 - \nu$=Punkte vorausgehenden Punkte gleich $\omega \cdot 2 - \nu$ ist, wo die Punktenmenge $(\omega \cdot 2 - \nu)$ alle Punkte der Menge $(\omega \cdot 2)$ umfaßt außer den Punkten $\omega \cdot 2 - 1$, $\omega \cdot 2 - 2$, $\omega \cdot 2 - 3$, ... $\omega \cdot 2 - \nu$ . . . ., d. h. alle Punkte der Menge $(\omega \cdot 2)$ außer den ν ersten, dem Endpunkte $\omega \cdot 2$ dieser Menge vorausgehenden Punkte. Daraus ersieht man, daß die Ordinalzahlen $\omega \cdot 2$ und $\omega \cdot 2 - \nu$ zur Abzählung der dem Endpunkte einer geometrischen Menge erster Ordnung vorausgehenden Punkte sich vollkommen eignen.

Ob aber diese Abzählung, wenn sie noch weiter fortgesetzt wird, nicht auf Widersprüche führt, die sich durch keine Umbildung der transfiniten Zahlenlehre Cantors mehr vermeiden lassen? Wenn wir nun jene Abzählung noch weiter fortsetzen, so werden wir offenbar, wenn alle Ordinalzahlen von der Form $\omega \cdot 2 - \nu$ erschöpft sind, zu der Ordinalzahl ω kommen müssen (wie dies auch in der unteren Reihe der Fig. 6 ausgedrückt steht), und von dieser weiter zu den Ordinalzahlen von der Form $\omega - 1$, $\omega - 2$, $\omega - 3$, ... $\omega - \nu$,

.... Wir gelangen somit, indem wir eine Punktenmenge mit der Punktenanzahl $\omega \cdot 2$ abzählen wollten, wiederum zu einer Punktenmenge, deren Punktenanzahl gleich ω ist, resp. sein soll, und das ist gerade die Punktenmenge, von der wir ursprünglich ausgingen, und deren Punktenanzahl wir nachher gleich $\omega \cdot 2$ setzen mußten, um die transfinite Zahlenlehre Cantors von den ihr bei ihrer Anwendung auf das konsekutive Diskretum anhaftenden Widersprüchen befreien zu können. Wir drehen uns somit in einem Kreise, denn wir müssen nunmehr auch für die neue Punktenmenge (ω), die als Bestandteil der ursprünglichen Punktenmenge (ω) auftritt, dasselbe voraussetzen, was wir für diese letztere getan haben, d. h. wir müssen auch deren Punktenzahl gleich $\omega \cdot 2$ setzen, dann wird sich aber, wenn wir dieselbe in obiger Weise abzählen, in ihr wiederum eine Punktenmenge (ω) als Bestandteil ergeben, deren Punktenzahl wiederum gleich $\omega \cdot 2$ gesetzt werden müsse usw. in infinitum. Man meine nicht etwa, dieser progressus in infinitum lasse sich einfach durch die Voraussetzung beheben, die Punktenzahl der geometrischen Menge (ω) sei schlechthin unbestimmt unendlich und abzählbar also erst durch die wohlgeordnete Menge aller denkbaren Ordinalzahlen überhaupt, nämlich durch die sogenannte Menge W:

$$1, 2, 3, 4, \ldots \nu, \ldots \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots \omega + \nu \ldots \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \omega \cdot 4, \ldots \omega \cdot \nu, \ldots \omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots \omega^{\nu}, \ldots \omega^{\omega^{\omega}}, \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}, \ldots \alpha \ldots \lambda, \lambda + 1, \ldots \gamma \ldots$$

Denn auch dann bestände in der Punktenmenge (W) die Punktenmenge (ω) als Bestandteil, was ein einfacher Blick auf die Zahlenmenge W lehrt, und dann müßte weiter dasselbe auch für diese Menge (ω) gelten, man müßte so zu der unbestimmt-unendlich großen Menge von unbestimmt-unendlich vielen Punktmengen (W) seine Zuflucht nehmen, eine solche Menge würde aber offenbar wiederum die Menge (ω) als Bestandteil in sich enthalten, dem Verhängnis würde man also auch damit nicht entrinnen.

In jenem progressus in infinitum kommt eben ein logischer Zirkel zum Ausdruck, der sich auf keine Weise vermeiden läßt, da er einen inneren Widerspruch darstellt. Und an diesem inneren Widerspruch geht alle Hoffnung einer weiteren Umbildung der transfiniten Zahlenlehre Cantors zur Ermöglichung ihrer Anwendung auf das

unendliche konsekutive Diskretum zugrunde. Denn dieser innere Widerspruch erschüttert diese Lehre in ihrer Grundfeste, in der Voraussetzung der Grundzahl ω selbst: wenn die Zahl ω im Gebiete der konsekutiven unendlichen Raumform möglich wäre, dann müßte eine Punktenmenge (ω) konstruiert werden können, eine solche Punktenmenge kann aber nicht konstruiert werden, weil sie sich selbst immer wieder voraussetzt, weil sie bestehen müßte, bevor sie besteht, was eben widersprechend und unmöglich ist, die Zahl ω ist also im Gebiete der konsekutiven Raumform unmöglich.

Wir stehen nunmehr vor einem Dilemma: entweder läßt sich eine transfinite Zahlenlehre denken, in der die Ordinalzahl ω Cantors überhaupt nicht mehr besteht, oder das konsekutive Diskretum kann nicht aus einer unendlichen Anzahl von Punkten bestehen. Wir haben nun im Anfang dieses Abschnitts bemerkt, daß Veronese den Versuch einer von derjenigen Cantors verschiedenen transfiniten Zahlenlehre gemacht hat, die mit den beiden Grundvoraussetzungen der transfiniten Zahlenlehre Cantors bricht und demnach auch die transfinite Ordinalzahl ω Cantors umgeht. Nach den bisherigen Ausführungen, die uns die eine Grundvoraussetzung Cantors zugunsten derjenigen Veroneses aufzugeben zwangen, wäre nun zu erwarten, daß wir ebenso den obigen Widerspruch durch die Preisgabe der zweiten Grundvoraussetzung Cantors und die Annahme der entsprechenden Grundvoraussetzung Veroneses vermeiden. Um dies zu entscheiden, müssen wir zuvor die transfinite Zahlenlehre Veroneses in ihren Grundzügen kennen lernen.

Von den acht Hypothesen, in denen Veronese seine transfinite Zahlenlehre ausgedrückt hat, beziehen sich die ersten fünf auf das Unendlich-Große und die drei letzten auf das Unendlich-Kleine. Wir werden hier nur die ersten fünf berücksichtigen, da sie für unsere Untersuchung des nach oben unendlichen konsekutiven Diskretums maßgebend sind.

Während Cantor seine transfinite Zahlenlehre auf rein arithmetischer Grundlage aufgebaut hat, baut Veronese die seinige auf anschaulich-geometrischer Grundlage, indem er von dem Begriffe der Geraden oder der Grundform (Hyp. I) als des „in der Lage seiner Teile identischen Systems einer Dimension“ (Hyp. II) ausgehend[1]

[1] Vergl. Veronese, a. a. O., § 71, S. 77, 8, im Zusammenhang mit der Def. I, § 68, und Def. I, § 70.

daran unmittelbar seine auf das Unendliche sich beziehenden Hypothesen anschließt. Veronese selbst beleuchtet den Unterschied zwischen seiner Hypothese II und der entsprechenden Hypothese Cantors, und wir können diesen Unterschied anschaulich in den Figuren 7 und 8 illustrieren. Während der Hyp. II Veroneses gemäß in der Richtung der Geraden AB_1 es stets um einen Punkt X zwei Segmente A_1X und XB_1 gibt, die dem Segmente AB mit dem Anfang A identisch sind (Fig. 7), ist nach Cantor nur ein solches Segment $XB_1 = AB$ notwendigerweise gegeben (so ist, wenn X ein ∞-Punkt ist, nach Cantor nur $\infty + 1 > \infty$ dagegen $\infty - 1 = \infty$, während nach Veronese

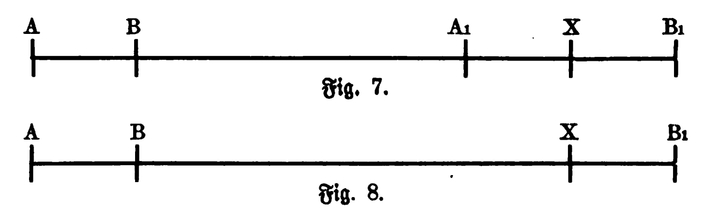


Fig. 7.

Fig. 8.

auch $\infty - 1 < \infty$ sein müsse).[1] Der hier dargelegte Unterschied zwischen Cantor und Veronese drückt nichts anderes aus als den Unterschied der beiden von ihnen vertretenen Gleichheitskriterien in bezug auf die unendlichen Mengen.

Die Hyp. III Veroneses drückt nun den anderen fundamentalen Unterschied beider Zahlenlehren aus. Während Cantor nämlich von dem arithmetischen Begriffe endlicher Zahlen ausgehend zu der ersten transfiniten Zahl ω als der Gesamtheit aller dieser Zahlen gelangt, geht Veronese von dem geometrischen Begriffe des Gebiets der Skala endlicher Segmente aus und gelangt zu dem dieses Gebiet in sich umfassenden unendlich-großen Segment, ohne daß dieses letztere aus dem ersteren mit Notwendigkeit hervorgehen soll. Unter der Skala versteht Veronese die unbegrenzte Reihe von endlichen, einem ersten endlichen Segment (AB, Fig. 7) in einer Geraden gleichen Segmente und unter dem Gebiet der Skala das unbegrenzte, alle Glieder dieser Reihe in sich umfassende Segment.[2] Während nach Cantors Lehre nun dieses unbegrenzte mit dem Gebiet der Skala identische Segment zugleich das unendlich-große Segment erster Ordnung darstellt, soll

[1] Veronese, a. a. O., § 90, Hyp. I und Bem. I, S. 117, und Bem. IV, S. 119.
[2] Veronese, a. a. O., § 80, Def. I und III, S. 89.

nach der Hyp. III von Veronese das unendlich-große Segment erster Ordnung **nicht** mit dem unbegrenzten Segment des Gebiets der Skala selbst identisch sein, sondern dasselbe in sich umfassen.[1] Oder, anders ausgedrückt, nach Cantor soll das Gebiet der Skala **als solches** ein erstes, außerhalb dieses Gebiets liegendes Element (resp. Punkt) bestimmen (so daß, wenn wir denselben mit A_ω bezeichnen und den Anfangspunkt mit A, dann das Segment AA_ω mit dem Gebiet der Skala selbst identisch ist), während nach Veronese der erste, außerhalb des Gebiets der Skala im Unendlich-Großen liegende Punkt ganz **unabhängig** von dem Gebiet der Skala zu denken, resp. zu setzen ist, was Veronese eben in seiner Hypothese III ausdrückt.[2] Arithmetisch ausgedrückt bedeutet dieser Unterschied, daß die unendlich-große Zahl erster Ordnung nach Veronese **nicht** die Gesamtheit aller **endlichen** Zahlen darstellen soll, daß also ∞_1 (so bezeichnet Veronese seine unendlich-große Zahl erster Ordnung) nicht gleich Cantors ω sein soll.[3]

Zu unseren Zwecken wäre das über die transfinite Zahlenlehre Veroneses bisher Mitgeteilte genügend, der Vollständigkeit halber müssen wir aber weiter noch seine Hypothese IV und Hypothese V darlegen, da in denselben Veronese eben den Versuch macht, Cantors ω in der transfiniten Zahlenlehre vollständig zu umgehen. Wenn nämlich der im Unendlich-Großen liegende Punkt außerhalb des Gebiets der Skala (endlicher Segmente) liegt, dann scheint seine Stelle in der Grundform ganz unbestimmt und willkürlich zu sein, so daß uns anscheinend kein Mittel zu Gebote steht, zu unterscheiden, ob ein solcher Punkt das Unendlich-Große erster, zweiter, dritter usw. Ordnung darstellt. Die Hypothese IV Veroneses soll nun dieses Mittel darbieten. Dieselbe besteht aus zwei Teilen und lautet folgendermaßen:

„**Wenn man in dem in bezug auf eine beliebige Einheit** (AA_1) **im Unendlich-Großen liegenden Gebiet 1. ein beliebiges Element** B(∞) **auswählt, so existiert in dem Segment** (AB(∞))

---

[1] Veronese, a. a. O., § 82, Satz R, S. 101, 2.

[2] Veronese, a. a. O., § 82, Hyp. III und Satz a und b, und Def. III, S. 96—99.

[3] Vergl. Veronese, a. a. O., § 90, Bem. IV und Satz b, S. 119. Veronese befindet sich aber im Irrtum, wenn er hier meint, es genüge Zahlen von der Form $\infty_1 - n$ vorauszusetzen, um Cantors ω auszuschließen, denn wir haben früher gefunden, daß sich mit Cantors ω ganz gut Zahlen von der Form $\omega - \nu$ vertragen können.

ein solches Element X, daß AX und (XB(∞)) ebenfalls in bezug auf (AA_1) unendlich-groß sind, und 2. existiert ein solches Element A(∞), daß das Segment (AX) für jedes be-

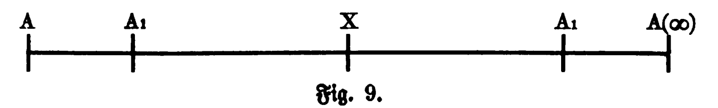


Fig. 9.

liebige X in bezug auf (AA(∞)) endlich ist". Der Sinn dieser vierten Hypothese Veroneses läßt sich an der Fig. 9 erläutern. Wenn AA(∞) das unendlich-große, das Gebiet der Skala mit dem Anfangssegment AA_1 umfassende Segment ist, dann gibt es in diesem Segment einen Punkt X, so daß AX und XA(∞) in bezug auf AA_1 unendlich-groß sind (d. h. daß jedes von ihnen ein eigenes Gebiet der Skala in sich enthält und zwar AX dasjenige mit dem Segment AA_1 und XA(∞) dasjenige mit dem Segment A(∞)A_1), in bezug auf AA(∞) aber endlich, z. B. AA(∞) = 2 AX. Veronese möchte diese seine Hypothese als völlig unabhängig von den früheren hinstellen, sie ist es aber nicht, denn sie folgt unmittelbar aus den beiden früheren und seinem allgemeinen Gleichheitskriterium.

Wenn nämlich nach der Hypothese III der im Unendlich-Großen liegende Punkt A(∞) ganz außerhalb des Gebiets der Skala mit dem Anfangssegment AA_1 liegt, so muß es nach der Hypothese II vom Punkte A(∞) aus in entgegengesetzter Richtung ein ebensolches Gebiet der Skala mit dem Anfangssegment A(∞)A_1 = AA_1 geben.[1] Wenn dies nun feststeht, so ist es klar, daß es nach Hypothese III ebenso einen außerhalb des Gebiets dieser zweiten Skala im Unendlich-Großen liegenden Punkt geben muß, wie der Punkt A(∞) nach derselben Hypothese außerhalb des Gebiets der ersten Skala liegt. Gewiß braucht dieser Punkt vorerst nicht auch außerhalb des Gebiets der letzteren Skala zu liegen (es könne z. B. der Anfangspunkt A selber als solcher betrachtet werden), und Veronese hat recht, daß aus den Hypothesen II und III der Punkt X, der außerhalb des Gebiets beider Skalen liegt, nicht unmittelbar folgt.[2] Dieser Punkt folgt aber unmittelbar aus diesen beiden Hypothesen und seinem allgemeinen Gleichheitskriterium, aus dem auch die Hypothese II unmittelbar folgt.[3] Wenn nämlich

[1] Veronese, a. a. O., § 84, Satz b und c, S. 103—105.
[2] Veronese, a. a. O., § 85, Bem. I, S. 105.
[3] Veronese, a. a. O., § 90, Hyp. II und Bem. II, S. 118.

$\frac{\infty_1}{2}$ nicht $= \infty_1$ ist (wie nach Cantor $\frac{\omega}{2} = \omega$, da $2\omega = \omega$ ist), dann muß es zwischen den Punkten A und A(∞) in dem unendlich-großen Segment AA(∞) einen Punkt X geben, so daß $AX = \frac{AA\infty}{2}$ und dieser Punkt hat nun die Eigenschaften der beiden Teile der Hypothese IV Veroneses, denn das Segment AX (resp. XA(∞)) muß unendlich-groß sein (sonst wäre AA(∞) endlich) und der Voraussetzung nach ist AA(∞) = 2 AX. Weiter folgt dann aber, daß in jedem der unendlich-großen Segmente AX und XA(∞) es wiederum je einen Punkt X_1 geben muß, der wiederum in bezug auf diese Segmente den beiden Eigenschaften der Hypothese IV Veroneses genügen muß usw. in infinitum, so daß das unendlich-große Segment AA(∞) unendlich viele Gebiete der Skalen mit den endlichen Anfangssegmenten enthält.

Wie nun das unendlich-große Segment AA(∞) in bezug auf das endliche Anfangssegment AA_1 (oder ein endliches Segment überhaupt) das Unendlich-Große erster Ordnung darstellt[1], so wird ein unendlich-großes Segment AB(∞), welches in bezug auf AA(∞) das Unendlich-Große erster Ordnung darstellt (d. h. welches das Gebiet der Skala mit dem unendlichen Anfangssegment AA(∞) in sich umfaßt), das unendlich-große Segment zweiter Ordnung in bezug auf AA_1, darstellen usw.[2] Wenn nun die Hypothese IV unendlich viele Male auf ein unendlich-großes Segment endlicher Ordnung angewendet wird, dann entsteht das unendlich-große Segment unendlicher Ordnung und dies ist die Hypothese V Veroneses[3], die uns hier nicht weiter interessiert.

Auf Grund der fünf Hypothesen Veroneses nun entsteht die absolut unbegrenzte Reihe von endlichen und unendlich-großen Zahlen, deren jede einem begrenzten endlichen oder unendlich-großen Segment der Grundform entspricht:

$1, 2, 3, \ldots n, \ldots\ldots \infty_1 - n, \ldots\ldots \infty_1 - 3, \infty_1 - 2, \infty_1 - 1, \infty_1, \infty_1 + 1, \infty_1 + 2, \infty_1 + 3, \ldots\ldots \infty_1 + n, \ldots\ldots$

---

[1] Überhaupt stellt jedes in bezug auf das endliche Einheitssegment AA_1 unendlich-große Segment, welches dem II. Teile der Hyp. IV genügt, nach Veronese ein unendlich-großes Segment erster Ordnung dar. Vergl. Veronese, a. a. O., § 86, Def. II, S. 111.

[2] Veronese, a. a. O., § 86, Def. II, S. 111.

[3] Veronese, a. a. O., § 91, Bem. I und Hyp. V, S. 121.

$2\infty_1 - 1,\ 2\infty_1,\ 2\infty + 1,\ \ldots .\ n\infty_1 n - \ldots .\ n\infty_1,\ \ldots .$
$n\infty_1 + n_1,\ \ldots .\ \infty_1^2 - n_1,\ \ldots .\ \infty_1^2,\ \ldots .\ \infty_1^2 + n_1,\ \ldots .$
$n\infty_1^n - n,\ \ldots .\ n\infty_1^n,\ \ldots .\ n\infty_1^n + n,\ \ldots .\ \infty^\infty,\ \infty^{\infty^n},$
$\infty^{\infty^\infty}\ \ldots \ldots$

Wir wollen nunmehr, nachdem wir uns mit den Grundzügen der transfiniten Zahlenlehre Veroneses bekanntgemacht haben, auch deren Anwendbarkeit auf das konsekutive Diskretum untersuchen.

Das wollen wir nunmehr an der Figur 10 vornehmen, die das Veronesesche Analogon der Cantorschen Figur 2 in dem konsekutiven Diskretum darstellt. Während in der Figur 2 die Strecke ——

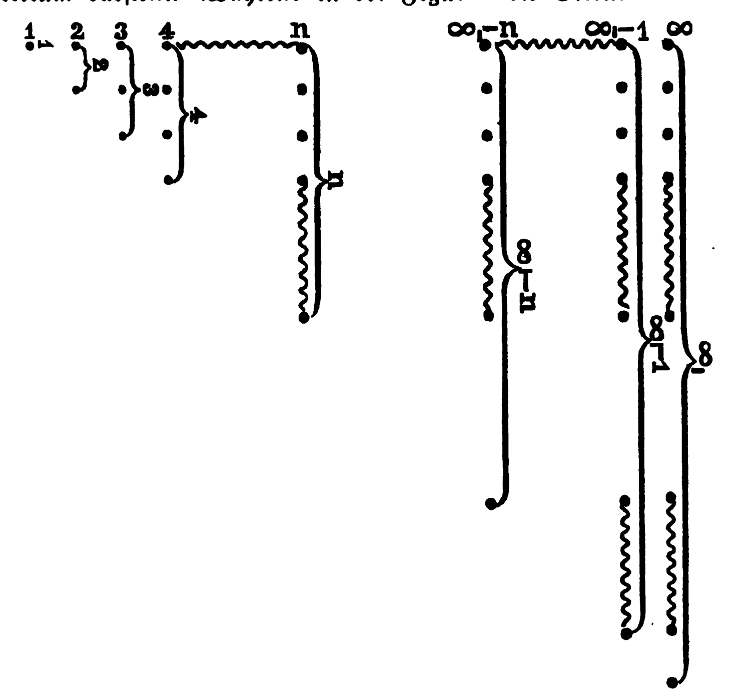


Fig. 10.

bedeutet, daß ein begrifflicher Zusammenhang zwischen den endlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... ν und der unendlichen Zahl erster Ordnung ω besteht, bezeichnet in der Figur 10 die unausgezogene leere Strecke zwischen n und $\infty_1 - n$ resp. ∞_1, daß kein unmittelbarer

begrifflicher Zusammenhang zwischen den endlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n und der ersten unendlichen Zahl ∞_1 Veroneses besteht, da die letztere nicht die Gesamtheit der ersteren bedeutet. Ist dies letztere nun der Fall, so ist es klar, daß es zwischen dem ersten Punkte 1 und dem das Ende des unendlich-großen Segments erster Ordnung darstellenden letzten Punkte ∞_1 der Figur 10 notwendigerweise einen Punkt geben muß, der zwischen beiden gleichweit entfernt ist. Welcher unendlichen Zahl im Sinne Veroneses entspricht nun dieser Punkt? Der Zahl $\frac{\infty_1}{2}$ antwortet Veronese. Fragen wir nun nach dem Grunde dieser Antwort, so kann dieser Grund nur in der Behauptung liegen, daß der Punkt ∞_1 eben die unendlich-große Zahl erster Ordnung und der Punkt $\frac{\infty_1}{2}$ deshalb die Hälfte dieser Zahl darstellen wird. Fragen wir uns nun aber, worin der begriffliche Unterschied zwischen dem Punkte ∞_1 und $\frac{\infty_1}{2}$ in bezug auf das Gebiet der endlichen Skala resp. der unendlichen Menge der endlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n, ... liegt, so ist es offenbar, daß kein solcher anzugeben ist, da beide Punkte in gleicher Weise außerhalb dieser Zahlen liegen, so daß in bezug auf das Gebiet der letzteren jeder außerhalb derselben in der Richtung der Geraden $1\,\infty_1$ liegende Punkt gleichermaßen den im Unendlichen liegenden Punkt ∞_1 darstellen kann. Der Begriff der unendlich-großen Zahl ∞_1 Veroneses ist also völlig unbestimmt. Nur wenn man von vorneherein das Unendliche als feststehend betrachtet, läßt sich auf Veronesechem Wege noch, allerdings auch dann nur scheinbar, zu einem solchen gelangen: wenn aber dieser Begriff zugleich die objektive Existenz des Unendlichen gewährleisten soll, dann ist der Veronesesche Weg dazu völlig ungeeignet. In der Tat unterscheidet sich der Punkt $\frac{\infty_1}{2}$ in bezug auf das Gebiet der endlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n . . . . begrifflich in gar nichts von dem Punkte ∞_1, da beide Punkte in gleichem Sinne außerhalb dieses Gebietes liegen und die dazwischenliegenden Strecken notwendigerweise jede eine unendliche Menge von Gebieten endlicher Skalen enthalten müssen. Freilich könnte man sagen, daß diese unendlichen Mengen nicht einander gleich sind. Gewiß sind sie nicht gleich, wenn die unendlich-große Strecke erster Ordnung

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \sim\sim n \quad \frac{\infty}{2} \quad \infty_1 - n \; \infty_1 - 3 \; \infty_1 - 2 \; \infty_1 - 1 \; \infty_1$

Fig. 11.

$1 \infty_1$ schon als bestehend vorausgesetzt wird, denn dann ist die Strecke (vgl. Figur 11) $\frac{\infty_1}{2}$ offenbar $< \infty_1$ und in ähnlicher Weise wird $\frac{\infty_1}{4} < \frac{\infty_1}{2}$ ꝛc. sein. Aber damit die unendlich-große Strecke $1 \cdot \infty_1$ bestehen kann, müßten zuvor die Strecken $1 \frac{\infty_1}{2}$ $1 \frac{\infty_1}{4}$ ꝛc. bestehen können, diese könnten aber nur dann bestehen, wenn wir einen Größenunterschied zwischen den entsprechenden unendlichen Mengen darin enthaltener endlicher Skalen, unabhängig von dem Veroneseschen Begriffe der unendlich-großen Zahl erster Ordnung, feststellen könnten, worin sich eben die völlige Unbestimmtheit dieses letzteren Begriffs klar offenbart.

Auf Grund dieses Resultats kann man nun leicht einsehen, daß die transfinite Zahlenlehre Veroneses in ihrer Anwendung auf das konsekutive Diskretum zu ähnlichen Widersprüchen führt, zu denen uns die Anwendung der Cantorschen geführt hat. Wie wir in bezug auf die letztere fanden, daß die aus konsekutiven Punkten bestehende ω-Menge in Wahrheit eine absolut unbestimmt-unendliche Anzahl von solchen Punkten enthalten müßte, und daß auch in dieser letzteren für die ω-Teilmenge wiederum dasselbe gelten müßte usw. in infinitum, worin sich die völlige Unbestimmtheit dieser Menge in dem konsekutiven Diskretum ergab, ebenso ist es nach dem Obigen leicht einzusehen, daß bei der Anwendung der Veroneseschen Zahlenlehre auf dasselbe die ∞_1-Menge völlig unbestimmt wird, d. h. daß sie in Wahrheit eine absolut unbestimmt-unendliche Anzahl von solchen Mengen in sich enthält usw. in infinitum, daß also die ∞_1-Menge, also eine aus einer unendlichen Anzahl von konsekutiven Punkten bestehende Menge, auch wenn diese in Veroneseschem Sinne gefaßt wird, unmöglich ist.

Es ergibt sich daraus aber auch ein wichtiges Resultat in bezug auf die logische Begründung der beiden transfiniten Zahlenlehren. In ihrer Anwendung auf das konsekutive Diskretum treten die Widersprüche der transfiniten Zahlenlehre Cantors viel offenkundiger als diejenigen Veroneses einfach deshalb hervor, weil die erstere logisch in ihrer ersten Grundlage viel schärfer gefaßt ist, indem sie die Gesamtheit aller endlichen Zahlen zu der ersten unendlichen Zahl macht, und

unendliche Mengen, die nicht zahlenmäßig ausdrückbar wären, nicht zulassen will, während die zweite diese letzteren zuzulassen genötigt ist, dadurch aber die letzte logische Grundlage des Begriffs der unendlich-großen Zahl erster Ordnung verliert.[1] Cantors Ausgangspunkt bilden die konsekutiven Zahlmengen, Veroneses Ausgangspunkt die konsekutiven Segmentsmengen, der Zielpunkt Cantors liegt aber in den inkonsekutiven Punktmengen, derjenige Veroneses dagegen fällt zusammen mit seinem Ausgangspunkte. Cantors Ausgangspunkt versetzte ihn in die Lage, zu dem logisch scharf gefaßten Begriffe der Zahl ω zu gelangen, sein Zielpunkt verhinderte ihn daran, die Unmöglichkeit der Anwendung derselben auf die geometrische Gerade einzusehen (denn, wie wir später sehen werden, lassen sich leicht die Widersprüche der aus konsekutiven Punkten bestehenden unendlichen Geraden auf die aus konsekutiven Segmenten bestehenden unendlichen aus inkonsekutiven Punkten bestehenden Geraden übertragen), Veroneses Ausgangspunkt dagegen verhinderte ihn zu dem logisch scharfen Begriffe der unendlichen Zahl erster Ordnung zu gelangen, indem dieser Ausgangspunkt zugleich sein Zielpunkt war. Unsere Betrachtungen an dem konsekutiven Diskretum zeigen uns, daß eine transfinite Zahlenlehre, wenn sie nicht schon in ihrem Anfang begrifflich völlig unbestimmt dastehen soll, notwendigerweise mit Cantors ω anfangen muß, sie zeigen aber zugleich auch mit aller Deutlichkeit, daß die Anwendung dieser letzteren auf dasselbe zu unlösbaren Widersprüchen führt, woraus indirekt hervorgeht, daß das konsekutive Diskretum überhaupt nicht unendlich sein könne, daß dasselbe nur endlich gedacht werden müsse.

Dasselbe Resultat werden wir nunmehr auch direkt gewinnen, indem wir den letzten Ursprung aller dieser Widersprüche aufzeigen wollen.

Der letzte Ursprung all der Widersprüche, die aus der Anwendung der transfiniten Zahlenlehre Cantors auf das konsekutive unendliche Diskretum entspringen, liegt einfach darin, daß in einem solchen Diskretum die Zahl ω von vorneherein ausgeschlossen ist, daß das Wesen desselben mit dem Begriffe der letzteren in einem unüberbrückbaren Gegensatz steht. In einem solchen Diskretum bedeutet nämlich die Fig. 2 nicht mehr eine bloße bildliche Darstellung der Zahl ω, sondern

[1] Die Richtigkeit dieses Vorwurfs wird evident beim konsekutiven Diskretum, denn in diesem letzteren kann es offenbar von vorneherein keine zahlenmäßig nicht ausdrückbaren unendlichen Mengen geben.

sie hat in demselben eine unmittelbare reelle Bedeutung, es läßt sich nämlich ganz gut ein mit der Fig. 2 vollständig übereinstimmendes räumliches Diskretum denken, in dem jede vertikale Punktmenge die entsprechende endliche Zahl unmittelbar darstellt. Es läßt sich nun leicht einsehen, daß in einem solchen Diskretum auf jede vertikale Punktenmenge, die einer endlichen Zahl entspricht, wiederum nur eine Punktenmenge folgen kann, die einer endlichen Zahl entspricht, da ja die entsprechenden Punkte der Horizontalmenge unmittelbar aufeinanderfolgen, konsekutiv sind, so daß in der Reihe dieser vertikalen Punktenmengen nie eine unendliche Punktenmenge wird folgen können, d. h. eine der Zahl ω entsprechende Menge. Wie nämlich die Zahl ω ganz außerhalb der Menge der endlichen Zahlen liegt, so müßte ebenso diese entsprechende vertikale Punktmenge ganz außerhalb der Reihe endlicher vertikaler Punktmengen liegen, was eben unmöglich ist, da der Voraussetzung gemäß alle überhaupt denkbaren vertikalen Punktmengen dieser Art in einer und derselben Reihe liegen, da sie ja alle (resp. die entsprechenden Punkte der Horizontalreihe) konsekutiv sind. Eine vertikale, der Zahl ω entsprechende Punktmenge ist also in dem konsekutiven Diskretum der wesentlichen Natur dieses letzteren gemäß ausgeschlossen und es ist dann kein Wunder, daß der Versuch, dieselbe doch darin zu statuieren, zu unlösbaren Widersprüchen führen muß. Die Richtigkeit dieser Behauptung läßt sich ganz strenge folgendermaßen begründen.

Die endlichen Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4, ... ν, ... entstehen, wie gesagt, so daß, von der ersten ursprünglichen Einheit, der Zahl 1, ausgehend, jeder vorhergehenden Zahl eine neue Einheit hinzugefügt wird, und es hat infolgedessen jedes Glied in dieser Reihe (jede einzelne endliche Zahl), außer dem ersten, ein ihm unmittelbar vorausgehendes und ein ihm unmittelbar nachfolgendes, so daß, wenn von der qualitativen Beschaffenheit dieser Glieder abstrahiert wird, d. h. ein jedes solches als eine einfache Einheit betrachtet wird, die Reihe aus lauter konsekutiven Einsen besteht. Genau dieselbe Beschaffenheit hat nun auch die aus konsekutiven Punkten bestehende Punktenmenge, die einen ersten Punkt hat. Denn sie ist in Wahrheit nichts anderes als ein völlig adäquates konkretes Beispiel jener abstrakten Reihe: wie jede einzelne Einheit in jener Reihe unteilbar ist, so ist hier jeder einzelne Punkt vollkommen einfach, also eine konkrete einfache Einheit; und wie dort jede einfache Einheit (außer der ersten) eine ihr unmittelbar

vorausgehende und nachfolgende hat, ebenso hat auch hier jeder Punkt (außer dem ersten) einen ihm unmittelbar vorausgehenden und einen ihm unmittelbar nachfolgenden. Wenn nun in jener ersten Reihe durch die sukzessive Addition einer Einheit zu der vorausgehenden Zahl stets eine endliche Zahl entsteht und entstehen kann, so wird auch in dieser zweiten Menge durch die sukzessive Addition des einen Punktes zu dem vorausgehenden nur eine endliche Punktmenge entstehen können. Während wir uns nun — und hierin liegt der Schwerpunkt unserer Beweisführung —, rein abstrakt genommen, ganz gut eine ganz neue Zahl ω denken können, die die Gesamtheit aller endlichen Zahlen bedeutet, resp. die die ganze Reihe der der ersten Einheit sukzessive zu addierenden Einheiten, zusammen mit dieser ersten selbst, enthält, weil es in einer solchen keine letzte Einheit gibt (resp. zu geben braucht), ist eine entsprechende ω-Menge bei jener konkreten Punktmenge nicht möglich, da es bei dieser notwendigerweise einen letzten, die ganze Reihe von Punkten abschließenden Punkt geben muß. Denn wie die Gesamtheit aller endlichen Zahlen, in der es keine größte endliche Zahl gibt, zu der neuen unendlichen Zahl ω führt, die außerhalb dieser Reihe endlicher Zahlen liegt und auf sie alle unmittelbar folgt, ebenso müßte es außerhalb der unendlich vielen Punkten der Punktmenge ω, in der es keinen letzten Punkt gibt (resp. geben soll), einen Punkt geben, der die ganze unendliche Reihe zum Abschluß bringt, die betreffende Punktmenge zu einer aktual unendlichen (resp. zu einer unendlich-großen Geraden erster Ordnung) macht. Ist aber ein solcher gegeben, dann besteht kein begrifflicher Unterschied mehr zwischen einer solchen $\omega+1-$Menge sein sollenden Punktmenge und einer endlichen Punktmenge. Denn in beiden gibt es einen ersten und einen letzten Punkt, in beiden hat jeder Punkt außer dem ersten und dem letzten einen unmittelbar vorausgehenden und einen unmittelbar nachfolgenden Punkt, in jeder ergibt die (im Geiste gemachte) Addition eines Punktes zu den vorausgehenden, wenn von dem ersten Punkte ausgehend diese Addition sukzessive ausgeführt wird, immer eine endliche Punktmenge. Man wird vielleicht im Anschluß an das Letztere sagen: der begriffliche Unterschied bestehe eben darin, daß in der ersteren dabei nie auf eine letzte endliche Punktmenge zu gelangen ist, während dies in der zweiten (relativ) bald der Fall sein wird. Aber dies zu behaupten, hieße in einem circulus vitiosus sich bewegen: denn die Behauptung, jene erste Menge sei aus unendlich vielen Punkten zusammengesetzt, muß sich auf

einen begrifflichen Unterschied in den beiden Mengen stützen, folglich kann dieser begriffliche Unterschied nicht in der Voraussetzung der unendlichen Anzahl selbst liegen. Daß ein solcher begrifflicher Unterschied zwischen beiden Mengen in der Tat **nicht** besteht und bestehen kann — und dies ist das Entscheidende —, ergibt sich eben unmittelbar aus dem Vergleich der beiden Punktmengen mit den entsprechenden Zahlmengen. Der Unterschied zwischen einer endlichen Zahlmenge und der unendlichen Zahlmenge $(\omega + 1)$ besteht darin, daß, während die erste aus lauter konsekutiven Zahleinheiten besteht, d. h. jede Zahleneinheit darin, außer der ersten und der letzten, eine unmittelbar nachfolgende **und** vorausgehende hat, die zweite nicht aus lauter vollkommen konsekutiven Einheiten besteht, da wohl auch in ihr jede Zahleinheit, selbstverständlich außer der ersten 1 und der letzten ω, eine ihr unmittelbar nachfolgende hat, der letzten Zahl ω darin aber keine Zahl unmittelbar vorausgeht. Dagegen besteht ein entsprechender begrifflicher Unterschied zwischen einer endlichen und der $\omega + 1$ — Punktmenge nicht, da beide einen ersten und einen letzten Punkt haben und beide aus vollkommen konsekutiven Punkten bestehen, es entsprechen also beide begrifflich vollkommen der endlichen Zahlmenge, woraus sich unmittelbar der folgende fundamentale Satz ergibt:

Eine aus konsekutiven Punkten bestehende Punktmenge, die einen ersten und letzten Punkt hat, ist endlich.

Daß dieser Satz richtig ist, wird man nach der obigen Ausführung nicht bezweifeln können. Durch denselben sind alle einen Anfang und ein Ende habenden unendlichen Punktmengen resp. unendlich-großen Geraden im konsekutiven Diskretum ausgeschlossen. Durch dieses Resultat gerät aber unser Denken in seltsame Antinomien. Denn wenn irgendwo, so müßte gerade im konsekutiven Diskretum die Zahl ω und die aus ihr weiter entstehenden transfiniten Zahlen, wenn sie wirklich logisch möglich wären, bestehen können. Denn, wie wir früher sagten, in diesem Diskretum bedeutet die Figur 2 nicht eine bloße bildliche Darstellung der Zahl ω, sondern sie hat in demselben unmittelbare reelle Bedeutung, sie ist der völlig adäquate konkrete Ausdruck der endlichen und der unendlichen Zahlmenge, da in ihr jede vertikale Punktmenge einen konkreten völlig adäquaten Fall einer (abstrakten) endlichen oder transfiniten Zahl darstellt. Aber nur ein Blick auf die Figur überzeugt uns, wenn der obige fundamentale Satz zu Hülfe genommen wird, daß in einem

solchen konsekutiven Diskretum (die Figur stellt einen besonderen Fall der quadratischen diskreten Ebene dar)[1] die Zahl ω und demnach die transfinite Zahl überhaupt unmöglich ist. Denn wenn die transfinite Zahl ω in demselben bestehen könnte, dann müßte, wie in der Figur dargestellt, auf alle vertikalen endlichen Punktmengen eine unendliche der Zahl ω entsprechende vertikale Punktmenge folgen, die entsprechende horizontale Punktmenge, deren Punktenanzahl $\omega + 1$ sein müßte, hat aber offenbar, wie die Figur zeigt, einen ersten und einen letzten Punkt, und da sie, der Voraussetzung gemäß, aus lauter konsekutiven Punkten besteht, so muß sie nach dem obigen Satze endlich sein, also ist die transfinite Zahl ω und jede andere transfinite Zahl überhaupt in dem konsekutiven Diskretum unmöglich, dieses Diskretum kann demnach nicht unendlich, sondern nur endlich sein.

Andererseits wieder muß, gerade deshalb, weil das konsekutive Diskretum, speziell der Figur 2, den vollkommen adäquaten konkreten Ausdruck der abstrakten arithmetischen Reihe endlicher Zahlen bildet, in demselben ganz ebenso die Zahl ω möglich sein, wie sie in dieser abstrakten Reihe der Voraussetzung gemäß möglich ist. Somit geraten wir in eine offenbare Antinomie: einerseits kann infolge der vollen Kongruenz der abstrakten arithmetischen Reihe endlicher Zahlen mit der konkreten geometrischen Reihe von konsekutiven Punkten (mit einem ersten angefangen) die letztere, da sie stets außer dem ersten auch einen letzten Punkt hat, nicht unendlich sein, und andererseits muß sie kraft derselben Kongruenz auch unendlich sein können, da die entsprechende arithmetische Reihe unendlich sein könne. Die Antinomie ist, sowie sie hier formuliert worden, unzweifelhaft und man muß sie nun zu lösen versuchen. Es sind nun offenbar nur drei Lösungen derselben möglich, je nachdem ob man die eine oder die andere Seite derselben gelten läßt, oder ob man einfach die ganze Grundlage derselben, das konsekutive Diskretum, für eine Unmöglichkeit erklärt.

[1] Nach den Prinzipien der diskreten Geometrie (vergl. „El. d. n. G.", S. 345, und „Pr. d. M.", S. 252, 3) besteht die Größe einer reellen Geraden nur in der Summe der irreellen Zwischenpunkte. Für die hier geführten Beweisführungen ist es aber irrelevant, ob man die Größe der reellen Geraden in die Summe der reellen Punkte allein oder in die Summe der irreellen Punkte allein oder in die Summe beider setzt, in jedem Falle sind die entsprechenden Punkte (resp. Elementargeraden) konsekutiv. Über diese verschiedenen formellen Möglichkeiten der Schätzung der Größe reeller Geraden (und der Geraden überhaupt) in der diskreten Geometrie vergl. man meinen erwähnten Aufsatz in den „Annalen der Naturphilosophie", IV. Bd., S. 239 ff.

Die erste und, meiner Ansicht nach, die einzige logisch haltbare Lösung der Antinomie besteht in der Behauptung, daß eine aus konsekutiven Punkten bestehende Punktmenge notwendigerweise einen ersten und einen letzten Punkt haben und infolgedessen, dem obigen unzweifelhaften Satze gemäß, endlich sein müsse und daß daraus zugleich, auf Grund jener vollen Kongruenz der beiden Reihenarten, die Endlichkeit der abstrakten arithmetischen Reihe folgt. Der Schein, aus dem die Antinomie in letzter Instanz entspringt, besteht in der Möglichkeit der potentiellen Fortsetzung dieser letzteren ins Unbestimmte, d. h. die Endlichkeit der abstrakten arithmetischen Reihe ist nicht die bestimmte, sondern die unbestimmte Endlichkeit. In demselben Sinne kann aber auch die geometrische Menge unbestimmt endlich sein: zwar ist jede einmal gesetzte Punktenmenge als bestimmt endlich zu denken, nichts hindert aber dieselbe sich noch größer zu denken, wenn dabei nur nicht vergessen wird, daß sie als solche, einmal gesetzt, bestimmt endlich ist.[1] Wie jede Punktmenge, die wir uns, dieser Behauptung gemäß, denken, endlich ist, obgleich jede noch größer gedacht werden könnte (durch Hinzufügung neuer Punkte), ebenso wäre jede Zahl, die wir uns denken, endlich, obgleich jede, durch Hinzufügung einer neuen Einheit, vergrößert werden könnte; und wie jede konsekutive Punktmenge einen letzten Punkt hätte, so hätte auch jede bestimmte Zahlmenge eine letzte Zahl in sich.[2]

Die zweite Lösung bestünde darin, die Notwendigkeit der Zahl ω als der Gesamtheit aller endlichen Zahlen zu behaupten, den entsprechenden ω-Punkt der ω-Punktmenge dagegen zu leugnen. Und diese Lösung wäre in der Tat die einzige logisch denkbare, wenn man den Infinitismus des konsekutiven Diskretums um jeden Preis retten will. Man kann in der Tat die Voraussetzung, von der wir ausgingen, als wir die Notwendigkeit des außerhalb der ω-Punktmenge liegenden ω-Punktes als des Korrelatums der auf alle endlichen Zahlen folgenden Zahl ω behaupteten, anscheinend mit gutem Grunde in Ab-

[1] Man vergl. darüber ausführlich „Pr. d. M.“, S. 173 ff.

[2] Über die Notwendigkeit der Voraussetzung der größten endlichen Zahl der Raumpunkte vergl. man dagegen „Pr. d. M.“, S. 307—312. Ich muß hier ausdrücklich bemerken, daß diese Notwendigkeit nur auf dem Standpunkte des strengen Finitismus gilt und daß das Dilemma: entweder die Zufälligkeit der vielheitlichen Welt oder die Notwendigkeit der größten endlichen Zahl (a. a. O., S. 311) nicht mehr gilt, wenn die Möglichkeit des Infinitismus auf dem Standpunkte der neuen Geometrie (resp. die Vereinbarkeit beider) zugelassen wird.

rede stellen. Denn wenn es in der Zahlenmenge (ω), d. h. in der Menge aller endlichen Zahlen, deren Zahl ω ist, kein letztes Glied, d. h. keine größte resp. letzte endliche Zahl gibt, dann kann es in der Punktenmenge (ω) kein letztes Glied, d. h. keinen letzten Punkt geben, so daß wir einfach nur die Punktmenge ω als möglich vorauszusetzen haben, unendliche Punktmengen dagegen, die größer als ω wären, oder, präziser ausgedrückt, unendliche Punktmengen mit einem ersten Punkte (dem Anfang), die größer als ω wären, als unmögliche auszuschließen haben, da solche Mengen notwendigerweise die Punktmenge ($\omega + 1$) als Teilmenge enthalten müßten, diese aber nach dem obigen Fundamentalsatze über konsekutive Punktmengen mit beiden Enden notwendigerweise endlich sein müßte, woraus dann auch die Endlichkeit der ω-Menge und also auch die Endlichkeit jeder nach einer endlichen oder unendlichen Zahl vielfachen Punktenmenge folgen würde (nicht nur also wären Mengen von der Form $\omega \cdot \nu$, sondern auch die Mengen von der Form ω^{ν} usw. endlich, denn wenn die ω-Punktmenge endlich ist, dann muß auch z. B. die ω^2-Punktmenge endlich sein, da sie in bezug auf die erste endliche ω-Menge selbst eine ω-Menge wäre ꝛc.). Abstrakt genommen würde zwar auch in diesem Falle die unendliche Zahl ω auf alle endlichen Zahlen unmittelbar folgen, ihr würde aber im Gebiete der konsekutiven Punktmengen kein Punkt mehr entsprechen, der Zahl ω würde in diesem Falle einfach die gesamte unendliche Punktenreihe der Punktmenge (ω) entsprechen.

Diese Behauptung ließe sich sogar vom abstrakten Standpunkte aus verteidigen. Denn das Eigentümliche der Zahl ω besteht eben darin, daß sie die Gesamtheit aller endlichen Zahlen bedeutet, daß sie die Realisierung der gesamten Reihe dieser Zahlen als gegeben und vollzogen setzt, so daß man in diesem Vollzug und Setzung dieser Reihe, die kein letztes Glied hat, gleichsam die einzige Aufgabe der Zahl ω erblicken kann. Auf die mit einem ersten Punkt beginnende Punktenreihe übertragen, würde also dieser Auffassung gemäß die Zahl ω einfach die den endlichen Zahlen entsprechende Realisierung dieser ganzen Reihe (was aus der Fig. 2, wo jedem Punkte der horizontalen mit einem ersten Punkte beginnenden Punktreihe eine vertikale, der endlichen Zahl entsprechende Punktenreihe entspricht, unmittelbar zu ersehen ist) bedeuten, ohne daß dadurch ein außerhalb dieser ganzen Reihe liegender, der Zahl ω selbst entsprechender und dieselbe im Un-

endlichen abschließender Punkt gesetzt werden müßte (in der Fig. 2 würde also in diesem Falle auf alle die endlichen vertikalen Punktenmengen keine unendliche vertikale Punktenmenge [ω] folgen, so daß auch in der horizontalen Punktenmenge kein dieser vertikalen ω-Menge entsprechender ω-Punkt vorkommen würde).

Wenn man nun fragt, ob man bei dieser zweiten Lösung anderen transfiniten Zahlen außer ω eine geometrische Bedeutung beilegen kann oder nicht, so kann man sich ganz gut denken, daß auch ihnen eine solche zukommt. Denn die Zahl ω bedeutet in diesem Falle nur die mit einem ersten Punkte beginnende und mit keinem letzten abschließende Punktmenge, d. h. dieselbe bedeutet eine aus konsekutiven Punkten bestehende, einen Anfang, aber kein Ende habende Gerade. Da sich aber die Fortsetzung einer Geraden auch in der entgegengesetzten Richtung denken läßt, so hindert nichts, daß die Gerade von demselben ersten Punkte, wie in dem ersten Falle anfangend, auch in der entgegengesetzten Richtung sich ins Unendliche erstreckt, d. h. der Zahl ω entspricht, wie dies die Fig. 9 zeigt. Allerdings ist dies nur so möglich, wenn der transfiniten Zahlenlehre Cantors statt seiner das

Fig. 12.

Gleichheitskriterium Veroneses zugrunde gelegt wird, da eine Fortsetzung der ω-Punktmenge ebensowenig nach vorne (in der negativen Richtung) möglich ist, wie sie nach hinten (in der positiven Richtung) unmöglich war, solange das Gleichheitskriterium Cantors galt. Hier ist dies noch viel einleuchtender, als es in jenem Falle der Fall war. Denn wenn nach Cantor die Menge

1, 2, 3, 4, ... ν . . . .

mit den Mengen

2, 3, 4, 5, ... ν . . . . . .
3, 4, 5, ..., ν, ...
4, 5, ..., ν, ...
— — — — — — — — — —
— — — — — — — — — —

gleich (resp. ähnlich) ist, dann ist sie auch mit den Mengen

$$\begin{array}{l} 2, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, \nu, \ldots\ldots \\ 3, 2, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, \nu, \ldots\ldots \\ 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, \nu, \ldots\ldots \end{array}$$

— — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — —

gleich (resp. ähnlich), woraus unmittelbar die Unmöglichkeit einer Fortsetzung der aus konsekutiven Punkten bestehenden Geraden in der negativen Richtung (wenn die erste als positiv bezeichnet wird) folgen würde, da jeder Punkt, der dem Anfangspunkt der in der positiven Richtung verlaufenden Geraden hinzugefügt wird, selbst zu diesem ihrem Anfangspunkte wird. Wird dagegen das Gleichheitskriterium Cantors aufgegeben (man vergl. darüber die Anmerkung S. 42), dann leuchtet von selbst die Möglichkeit dieser Fortsetzung der Geraden in der negativen Richtung ein und es würde demgemäß die Anzahl der Punkte einer solchen keinen Anfang und kein Ende habenden Geraden der Cantorschen transfiniten Zahl $\omega \cdot 2$ entsprechen. Den transfiniten Zahlen von der Form $\omega + \nu$ würden offenbar die Teilgeraden dieser Geraden entsprechen, die aus einer ω-Punkte enthaltenden Halbgeraden und ν vor dieser liegenden Punkten beständen. Den transfiniten Zahlen $\omega \cdot 3$, $\omega \cdot 4$ xc. und den dazwischenliegenden Zahlen von der Form $\omega \cdot \nu + \nu$ würden nur noch strahlenförmige und gebrochene (in einer Ebene liegende) Linien entsprechen können, während z. B. der Zahl ω^2 offenbar ein Sechstel resp. ein Viertel einer aus konsekutiven Punkten bestehenden unendlichen (dreieckigen oder quadratischen) Ebene entsprechen würde. Allgemein gesprochen würden unter den transfiniten Zahlen nur den unendlichen Zahlen von der Form ω, $\omega \cdot 2$, ... $\omega \cdot \nu$, ... ω^2, ω^ν, ... ω^ω xc. keine Punkte im Raume entsprechen, dagegen allen Zahlen von der Form $\omega + \nu$, $\omega \cdot \nu + \nu$, $\omega^\nu + \nu$, $\omega^\omega + \nu$ xc. würden einzelne Punkte entsprechen, ganz ebenso wie endlichen Zahlen solche entsprechen, allerdings mit dem wichtigen Unterschiede, daß, während den endlichen Zahlen ohne Unterbrechung die einzelnen Punkte entsprechen, dies bei jenen transfiniten Zahlen nicht mehr der Fall ist, da zwischen ihnen Zahlen vorhanden sind, denen keine solche entsprechen.

Wie plausibel diese Lösung auf den ersten Blick auch erscheinen mag, so führt sie doch, logisch konsequent ausgedacht, dazu, die Zahl ω als solche, d. h. als eine besondere Zahl, zu leugnen, also nur eine Zahlmenge (ω) zuzulassen, ohne dieser Menge selbst einen Ordnungstypus resp. eine Zahl zuzuschreiben. Denn es läßt sich nicht leugnen:

wenn die Zahlmenge (ω), d. h. die Menge aller endlichen (in Cantors Sprache) Ordinalzahlen, als wohlgeordnete Menge aufgefaßt einen Ordnungstypus hat, und es also eine Zahl dieser Menge gibt, dann ist diese Zahl begrifflich etwas ganz Neues, was mit jener Menge selbst nicht mehr zusammenfällt, und es muß dann notwendigerweise, wie auf alle die endlichen Zahlen der Zahlmenge (ω) die unendliche Zahl ω selbst unmittelbar folgt, ebenso auf alle Punkte der konsekutiven Punktmenge (ω) ein ω-Punkt folgen, der diese Menge im Unendlichen ebenso abschließt, wie die Zahl ω den begrifflichen Abschluß der Zahlmenge (ω) bildet. Ist dem nun so (die Fig. 2 überzeugt uns unmittelbar von dessen Wahrheit), dann muß, wenn die Punktmenge (ω) widerspruchslos gedacht werden soll — und sie läßt sich, wie wir sahen, nur so widerspruchslos denken, wenn sie keinen ω-Punkt außer sich im Unendlichen hat —, offenbar die Zusammenfassung der Zahlmenge (ω) in ein Ganzes, d. h. die Behauptung, daß dieselbe einen Ordnungstypus besitzt, fallen gelassen werden. In diesem Falle hätten nun die der Zahl ω nachfolgenden Zahlen von der Form $\omega + 1$, $\omega + 2$ usw., wie alle transfiniten Zahlen überhaupt, keinen direkten arithmetischen Sinn mehr, sie wären bloße Zeichen dafür, daß zu der Punktmenge (ω) neue in derselben Richtung nicht mehr liegende Punkte des konsekutiven Diskretums, dessen Bestandteil jene Punktmenge bildet, hinzugefügt werden sollen, resp. daß es solche Punkte gibt.

Wenn wir nun zu all diesem noch hinzufügen, daß auf Grund desselben Satzes, auf Grund dessen konsekutive ω-Punktmengen mit einem (festen) Ende im Unendlichen unmöglich sind, auch unendlich kleine, aus konsekutiven Punkten bestehende Strecken in dem konsekutiven Diskretum ausgeschlossen sind, — denn in diesem Falle müßte notwendigerweise eine endliche Strecke aus unendlich vielen solchen unendlich kleinen Strecken, den einfachen Elementargeraden, bestehen, also aus einer unendlichen Anzahl von konsekutiven Punkten, was eben nach jenem Satze unmöglich ist, da jede endliche Strecke in diesem Falle eine einen ersten und letzten Punkt habende, aus konsekutiven Punkten bestehende $(\omega + 1)$ Punktmenge darstellen würde (vgl. darüber ausführlicher weiter unten) — wenn wir, sage ich, auch dieses in Betracht ziehen, dann erst wird uns klar werden, wie ärmlich einem konsequenten Unendlichkeitsvertreter die Anwendung des Unendlichkeitsbegriffs auf das konsekutive Diskretum erscheinen wird. Und doch ist dies das Äußerste, was sich noch von dem Unendlichkeitsbegriff, wenn

man sich nicht dabei in unlösbare und handgreifliche Widersprüche verwickeln will, retten kann, wenn derselbe auf das konsekutive Diskretum angewendet werden, wenn also dieses letztere unendlich sein soll. Wie man aus dem Obigen sieht, stellt dieses in dem konsekutiven Diskretum noch mögliche Unendliche logisch das Minimum des Unendlichen dar, ein Minimum übrigens, welches, wenn man nur streng logisch denken will, gerade an der Grenze der Unmöglichkeit steht.

Denn wenn die Zahlmenge (ω) selbst keine Zahl mehr hat und die Punktmenge (ω) keinen letzten dieselbe im Unendlichen abschließenden Punkt, dann gibt es keinen begrifflichen Unterschied mehr zwischen der unbestimmten Endlichkeit der arithmetischen Reihe endlicher Zahlen, die derselben nach unserer ersten Lösung zukommt, und dieser vermeintlichen aktuellen Unendlichkeit der Zahlmenge (ω) einerseits und der unbestimmten Endlichkeit der geometrischen Reihe einer mit einem ersten Punkte anfangenden konsekutiven Punktmenge, die derselben nach unserer ersten Lösung zukommt, und dieser vermeintlichen aktuellen Unendlichkeit der Punktmenge (ω) andererseits. Denn die unbestimmte Endlichkeit der arithmetischen Reihe bedeutet im ersten Falle nichts anderes, als daß sich diese Reihe nie als ein Ganzes denken läßt, daß die Unendlichkeit derselben nur in potentiellem, nicht aber in aktuellem Sinne besteht, daß eine unendliche Zahl aller endlichen Zahlen nicht besteht, daß vielmehr diese Reihe stets mit einem letzten endlichen Gliede endigt, daß sie also, aktuell gegeben gedacht, stets (bestimmt) endlich ist, und dasselbe bedeutet die unbestimmte Endlichkeit der mit einem ersten Punkte beginnenden konsekutiven Punktmenge. Hieraus ist es klar, daß — da die zweite Lösung, wenn sie logisch konsequent durchgeführt wird, sich von der ersten nur formell unterscheidet —, wenn die erste Lösung richtig ist, die zweite nicht richtig sein kann et vice versa. Denn wenn die erste Lösung für eine unrichtige erklärt wird, so bedeutet das nicht mehr und nicht weniger, als daß die unbestimmte Endlichkeit resp. die potentielle Unendlichkeit der arithmetischen und der geometrischen konsekutiven Reihe als solche unmöglich ist, daß dieselbe notwendigerweise zu der Voraussetzung der aktuellen Unendlichkeit beider Reihen führt, woraus dann, wie oben ausgeführt, mit Notwendigkeit, wenn alle weiteren Widersprüche des Unendlichkeitsbegriffs aufgehoben werden sollen, die Richtigkeit der zweiten Lösung folgen würde. Wenn sich aber die erste Lösung streng logisch begründen läßt, wie ich

dies an einem schon angeführten Orte gezeigt habe, dann folgt daraus unzweifelhaft, daß sich das konsekutive Diskretum nur als endlich denken läßt.

Wie dem nun auch sei, jedenfalls wird sich ein konsequenter Unendlichkeitsvertreter mit der zweiten Lösung, die ihm nur das allerkleinste Minimum der Realisierung seiner Lieblingsidee bietet, nicht zufriedengeben, sondern er wird seine Zuflucht zu einer dritten recht radikalen Lösung nehmen — er wird nämlich einfach die logische Möglichkeit des konsekutiven Diskretums, das ihn in solche Verlegenheiten bringt, in Abrede stellen. Damit würde die ganze Antinomie, aus der jene beiden Lösungen entsprungen, hinwegfallen, denn sie hätte, so scheint es wenigstens, dann keinen Boden mehr, da ihr der Gegenstand, auf den sie sich bezieht, dadurch würde entzogen werden. Denn mit der Aufhebung des aus konsekutiven Punkten bestehenden Raumes scheint der Unendlichkeitsvertreter aller obigen Sorgen entledigt zu sein, ein solcher Unendlichkeitsvertreter, wenn er nur konsequent genug ist, würde sogar bereitwilligst zugeben, daß ein solcher Raum nur endlich, ja noch mehr, nur bestimmt endlich sein könne, da er konsequenterweise die unbestimmte Endlichkeit eines solchen zur aktuellen Unendlichkeit (obiger Art) erheben müßte und da diese unmöglich ist — was er wiederum noch bereitwilliger zugeben würde —, so würde er eben daraus den Schluß ziehen, daß das konsekutive Diskretum nur bestimmt endlich sein könne. Da diese bestimmte Endlichkeit, konsequent gedacht, zu einer größten endlichen Zahl der konsekutiven Raumpunkte führen müßte, so wäre das nur ein Grund mehr, die logische Möglichkeit des konsekutiven Diskretums zu leugnen.[1]

Wäre nun wirklich der Unendlichkeitsvertreter mit dieser seiner Bestreitung der logischen Möglichkeit des konsekutiven Diskretums mit einem Schlage all der Sorgen frei, die ihm dieses bereitete, solange es noch als logische Möglichkeit galt? Leider nicht. Denn wenn man einmal den Unendlichkeitsbegriff bei einem solchen, dem Zahldiskretum unmittelbar entsprechenden Raumdiskretum nach seiner Möglichkeit geprüft hat, dann hat man in ihm und damit auch im Begriffe des unendlichen Raumes manche Schwächen und Mängel wahrgenommen, die sonst völlig verborgen und unbemerkt blieben. Und wenn man dann selbst die logische Möglichkeit eines solchen Raumdiskretums in Abrede stellt, bleiben diese Einsichten in die Schwächen und Mängel

[1] Über die größte endliche Zahl vergl. man jedoch auch die Anmerkung auf S. 61.

des Unendlichkeitsbegriffs in seiner Anwendung auf den Raum davon unberührt und man kann sie dann auch auf andere Raumformen übertragen. Dies wird freilich nur dann der Fall sein, wenn es gelingt, in diesen letzteren eine Art konsekutiver Teile zu entdecken, denn sind die Teile derselben, möge man unter diesen letzteren welche Teile immer verstehen, stets inkonsekutiv, dann lassen sich jene Schwierigkeiten des Unendlichkeitsbegriffs, die aus dessen Anwendung auf das konsekutive Diskretum entspringen, nicht auf diese anderen Raumformen übertragen.

Nur eine einfache Überlegung überzeugt uns nun davon, daß solche konsekutive Teile auch bei diesen letzteren Raumformen existieren. Denn nach dem in dem ersten Abschnitt dieser Abhandlung Ausgeführten bezieht sich die Inkonsekution der Teile in der kontinuierlichen und in der inkonsekutiv diskreten Raumform nur auf die letzten Teile, aus denen dieselben (resp. die darin) bestehen, das heißt auf die einfachen Raumpunkte, dagegen sind die ausgedehnten, das heißt zusammengesetzten Teile derselben stets konsekutiv, da z. B. in einer ausgedehnten Strecke die ausgedehnten Teile, aus denen sie besteht, selbst wiederum ausgedehnte Strecken sind usw. in infinitum. Der einzige Unterschied, der in dieser Hinsicht zwischen dem konsekutiven Diskretum einerseits und diesen beiden inkonsekutiven Raumformen andererseits besteht, liegt darin, daß es in dem ersteren, da die ausgedehnte Strecke eines solchen Raumes in letzter Instanz aus einfachen konsekutiven Punkten besteht, eine kleinste unteilbare Strecke gibt (sie fällt mit dem zwei reelle Punkte trennenden irreellen Punkte zusammen), während es in den letzteren keine solche kleinste Strecke gibt, da es darin zwischen zwei Punkten stets einen dritten und also eine unendliche Menge von solchen gibt, die offenbar immer eine Strecke konstituieren. Obgleich man nun für eine aus inkonsekutiven Punkten bestehende Strecke selbstverständlich nicht behaupten kann, daß sie aus konsekutiven Teilen besteht, wenn unter den letzteren die einfachen, sie konstituierenden (resp. darin als vorhanden zu denkenden) Punkte selbst verstanden werden, so läßt sich dies offenbar ganz wohl tun, wenn unter diesen Teilen die Strecken selbst verstanden werden, aus denen sie besteht. Daß es in einer solchen Strecke keine kleinste einfache Teilstrecke gibt, ist dabei offenbar irrelevant, denn wenn wir irgendeine solche Teilstrecke zur Einheitsstrecke nehmen, können wir dann stets die ganze Strecke als aus einer (rationalen

oder irrationalen) Anzahl von solchen Teilstrecken bestehend auffassen, indem diese Teilstrecken unmittelbar aufeinanderfolgend die ganze Strecke ausmachen.

Wenn nun eine aus inkonsekutiven Punkten bestehende Strecke (resp. Gerade) ganz wohl als aus konsekutiven Teilen bestehend aufgefaßt werden kann, sofern unter diesen die sie konstituierenden Teilstrecken verstanden werden, dann läßt sich offenbar auf dieselbe ohne Einschränkung die für die aus konsekutiven Punkten bestehende Gerade geltende Behauptung übertragen, daß nämlich eine solche Strecke nur so unendlich sein könne, wenn sie kein Ende im Unendlichen hat (und daß sie, wenn dies letztere unmöglich ist, nur endlich sein könne). Denn gibt man einmal die Richtigkeit dieser Behauptung für die aus konsekutiven Punkten bestehende Gerade zu, dann muß man mit logischer Notwendigkeit dieselbe für jede Gerade überhaupt zugeben: denn daß bei der ersten Geraden die Teilgeraden mit den sie konstituierenden einfachen Teilen, den Raumpunkten, in letzter Instanz zusammenfallen, ist nur ein besonderer Umstand, der mit der Konsekution der Teilgeraden einer Geraden überhaupt, wenn die logische Möglichkeit anderer Geradenarten (resp. der aus inkonsekutiven Punkten bestehenden) zugelassen wird, in keinem begrifflich notwendigen Zusammenhange steht, da ja in diesen letzteren konsekutive Teilgerade bestehen, ohne daß die einfachen Teile derselben, die Raumpunkte, konsekutiv sind.[1]

[1] Es ist sogar merkwürdig festzustellen, daß die Willkürlichkeit der angenommenen Einheitsstrecke bei diesen Geraden alle Bedeutung verliert, wenn die Frage nach der Unendlichkeit einer solchen Geraden erhoben wird, d. h. wenn vorausgesetzt wird, eine solche Gerade sei aktuell unendlich. In der Fig. 13 ist eine Gerade dargestellt, die als

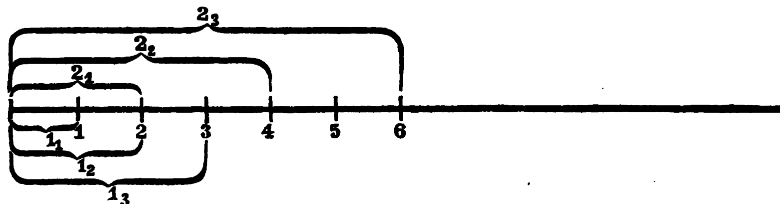


Fig. 13.

ins Unendliche sich erstreckend zu denken ist, in der zuerst eine mit 1 und 1_1 bezeichnete Strecke zur Einheitsstrecke genommen worden ist und außerdem noch eine zweite mit 2 und 1_2 bezeichnete Strecke, die das Doppelte der ersten Einheitsstrecke beträgt. Nach dem Gleichheitskriterium Veroneses ist nun offenbar die unendliche Reihe

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \nu \ldots\ldots$$

zweimal größer als die unendliche Reihe

$$2, 4, 6, \ldots\ldots 2\nu \ldots\ldots$$

Wenn dem nun so ist, wenn also die unendlich große Gerade mit dem Endpunkt im Unendlichen nicht besteht, dann läßt sich daraus leicht der merkwürdige Schluß ziehen, daß sich eine unendlich kleine Strecke im Raume, möge die Struktur desselben wie immer sein, überhaupt nicht denken läßt. Daß in dem konsekutiven Diskretum eine solche undenkbar ist, folgt unmittelbar aus der Unmöglichkeit der unendlich großen Strecke mit dem im Unendlichen liegenden Endpunkte in demselben. Denn die unendlich kleine Strecke erster Ordnung, wenn nur eine solche (um zunächst dieses einfachste Beispiel in Betracht zu ziehen) als möglich zugelassen wird, würde offenbar in diesem Falle mit der kleinsten Strecke im konsekutiven Diskretum zusammenfallen, so daß jede endliche Strecke in demselben dann aus unendlich vielen konsekutiven, unendlich kleinen Teilstrecken dieser Art bestehen würde, also in bezug auf die kleinste Teilstrecke eine unendlich große Gerade mit Anfangs- und Endpunkt darstellen würde, diese letztere aber nach dem oben Ausgeführten unmöglich ist (noch unmittelbarer läßt sich dies einsehen, wenn in Betracht gezogen wird, daß jede endliche Strecke in diesem Falle eine unendliche Punktenmenge mit einem ersten und letzten Punkte darstellen würde, die aber nach dem bekannten Satze unmöglich ist), woraus nur die Unmöglichkeit der unendlich kleinen einfachen Teilstrecke folgen würde. Da nun in jedem unendlich Kleinen beliebiger Ordnung in dem konsekutiven Diskretum notwendigerweise dies unendlich Kleine der einfachen Teilstrecke als letzter Bestandteil auftreten müßte (es genügt auch die unendlich kleine Strecke nächst niederer Ordnung in Betracht zu ziehen), so folgt daraus ohne weiteres, daß sich eine unendlich kleine Strecke in dem konsekutiven Diskretum, wenn in demselben die unend-

---

so daß, wenn ω die Zahl jener ersten Reihe ist, $\frac{\omega}{2}$ diejenige der zweiten sein wird. Die unendliche Gerade, welche der ersten Reihe entspricht, wird offenbar ebenso groß sein wie die Gerade, die der zweiten Reihe entspricht: denn die Einheitsstrecke der zweiten ist zweimal größer als diejenige der ersten, so daß, obgleich die Zahl dieser Einheitsstrecken $\frac{\omega}{2}$ ist, die resultierende Geradengröße doch dieselbe wie im ersten Falle sein wird, da $\frac{\omega}{2} \cdot 2 = \omega$. (Ähnliches würde sich ergeben, wenn zwei Geraden mit den Einheitsstrecken 1 und 3 rc. angenommen werden.) Da nach dem Gleichheitskriterium Cantors von vorneherein $\frac{\omega}{2}$ resp. $\frac{\omega}{\nu}$ (wo $\frac{\omega}{\nu}$ dem Ausdruck $\nu \cdot \omega$ entspricht) $= \omega$ ist, so folgt daraus ohne weiteres dasselbe Resultat.

lich große Strecke mit dem Endpunkt im Unendlichen nicht besteht, nicht denken läßt, daß in demselben dann jede endliche Strecke aus einer endlichen Anzahl von Punkten resp. kleinsten Teilstrecken besteht.

Fragen wir uns nun, ob sich in dem inkonsekutiven Diskretum die unendlich kleine Strecke denken läßt oder nicht, so ist leicht einzusehen, daß, wenn die unendlich große Strecke mit einem im Unendlichen liegenden Endpunkte derselben in einem solchen Diskretum undenkbar ist, auch eine unendlich kleine Strecke darin nicht wird gedacht werden können. Denn wäre eine solche denkbar, dann müßte jede endliche Strecke aus einer unendlichen (ω) Anzahl von solchen unendlich kleinen, konsekutiven Teilstrecken erster Ordnung bestehen, sie müßte also in bezug auf die letztere als Einheitsstrecke eine unendlich große Strecke (erster Ordnung) mit einem im Unendlichen liegenden Endpunkte darstellen, die aber der Voraussetzung gemäß unmöglich ist, so daß daraus unmittelbar die Unmöglichkeit der unendlich kleinen Strecke in einem solchen Diskretum folgt. Während nun in dem konsekutiven Diskretum unter der gemachten Voraussetzung jede endliche Strecke aus einer endlichen Anzahl von einfachen Teilstrecken resp. Punkten bestehen muß, läßt sich dies für die endliche Strecke des inkonsekutiven Diskretums nicht behaupten, da es in diesem keine kleinste endliche Strecke gibt, so daß man in bezug auf dieselbe nur behaupten kann, sie bestehe stets aus einer endlichen Anzahl von konsekutiven, endlichen Teilstrecken, diese wiederum aus einer endlichen Anzahl von solchen usw. in infinitum. Denn wie es in diesem Raume nach oben keine größte endliche Strecke gibt, d. h. keine endliche Strecke, von der sich nicht eine größere denken ließe, und dies schlechthin ins Unendliche geht, ohne daß man dabei auf eine Strecke stoßen würde, die nicht wiederum endlich wäre, ebenso ist in demselben nach unten keine Strecke denkbar, die nicht endlich wäre und von der es nicht noch eine kleinere endliche Strecke gäbe. Wie man hieraus sieht, müßte man, sobald man in einem solchen Diskretum die Unendlichkeit nach oben in dem eben erörterten Sinne leugnen, d. h. für unmöglich halten würde, mit Notwendigkeit auch die Unendlichkeit nach unten in dem eben erörterten Sinne leugnen, in welchem Falle dann aber in einem solchen Raume die Tatsache einer kleinsten endlichen Strecke zugelassen wäre, wodurch sich das inkonsekutive Diskretum notwendigerweise in das konsekutive verwandeln würde. Hieraus folgt also unzweifelhaft, daß das inkonsekutive

Diskretum nach oben notwendigerweise seiner Ausdehnung nach unendlich sein muß, da dasselbe seiner wesentlichen Natur (resp. der Punktenanzahl) gemäß es nach unten ist, während **das konsekutive Diskretum nach oben auch endlich sein könne,** da dasselbe seiner wesentlichen Natur gemäß nach unten — unter der gemachten Voraussetzung — endlich sein muß.

Die Unendlichkeit nach oben und unten, von der hier bei dem inkonsekutiven und dem konsekutiven Diskretum die Rede war, ist nur die kein Ende im Unendlichen habende Unendlichkeit, und diese kann, wie früher ausgeführt, nur Unendlichkeit der ersten Ordnung sein. Für unsere Ausführungen im nächsten Abschnitt ist es aber von großem Interesse zu erfahren, wie es sich mit der Existenz der unendlich kleinen Strecke in dem inkonsekutiven Diskretum verhält, wenn unendlich große Strecken höherer Ordnung darin als möglich zugelassen werden, d. h. wenn die unendlich große Strecke erster Ordnung als einen Endpunkt im Unendlichen habend aufgefaßt wird. Sobald nun für die aus endlichen konsekutiven Teilstrecken unmittelbar hervorgehende unendlich große Strecke angenommen wird, daß sie einen letzten Grenzpunkt im Unendlichen habe (der der transfiniten Zahl ω Cantors entspricht), muß man auch eine unendlich kleine Strecke voraussetzen, deren im unendlich Kleinen liegende Grenzpunkt zugleich die Grenze darstellt, der die immer kleiner werdenden endlichen Strecken zustreben, ohne sie je zu erreichen. Um dies zu veranschaulichen, bedienen wir uns der Figur 14, worin eine endliche Strecke zuerst in zwei Hälften, dann jede von diesen in zwei Hälften usw. geteilt ist. Wenn die ganze Strecke mit 1 bezeichnet wird, dann wird sie offenbar aus 2 Strecken be-

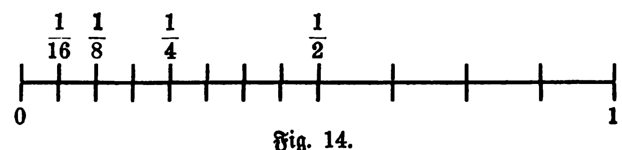


Fig. 14.

stehen, die durch $\frac{1}{2}$ dargestellt sind, aus 4, die durch $\frac{1}{4}$, und überhaupt aus ν solchen, die durch $\frac{1}{\nu}$ dargestellt sind, d. h. die den ν-ten Teil von 1 darstellen. Ist nun die Strecke 1 aus inkonsekutiven Punkten zusammengesetzt, so wird sie ins Unendliche teilbar sein, d. h. wie groß die endliche Zahl ν auch angenommen wird, wird es noch eine zu der endlichen Zahl $\nu + 1$ entsprechende kleinere Teilstrecke der

Strecke 1 geben. Wenn nun die der Reihe endlicher Zahlen 1, 2, 3, 4, ... ν .... entsprechenden Teilstrecken einer ins Unendliche wachsenden endlichen Strecke einen letzten der Zahl ω entsprechenden Punkt im Unendlichen haben, dann muß ebenso die Reihe der den Zahlen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ .... $\frac{1}{\nu}$ .... entsprechenden Teilstrecken einer ins Unendliche abnehmenden endlichen Strecke einen letzten der Zahl $\frac{1}{\omega}$ entsprechenden Punkt im unendlich kleinen Gebiete haben. Man könnte nun zunächst meinen, dieser Punkt könne mit dem Anfangspunkte 0 der Strecke 1 zusammenfallen, so daß, selbst wenn in dem inkonsekutiven Diskretum unendlich große Strecken verschiedener Ordnungen zugelassen werden, man gar nicht genötigt ist, die unendlich kleine Strecke erster und diejenigen höherer Ordnungen zuzulassen. Und diese Schlußfolgerung hätte wenigstens auf den ersten Blick (vgl. jedoch die nächste Anmerkung unten) nichts Anstößiges, solange man die logische Möglichkeit des konsekutiven Diskretums nicht in Betracht zieht, denn sobald man dieselbe in Betracht zieht, sieht man ein, daß eigentlich, wenn der im unendlich Kleinen liegende Grenzpunkt einer ins Unendliche abnehmenden endlichen Strecke mit dem Anfangspunkt dieser Strecke zusammenfällt (oder in absolutem Sinne $\frac{1}{\omega} = 0$ ist), diese dann in Wahrheit aus einer unendlich großen Anzahl (der Zahl ω) von solchen unmittelbar aufeinanderfolgenden Punkten bestehen würde. Denn wie die Strecke 1 aus ν konsekutiven $\frac{1}{\nu}$-Teilstrecken besteht, ebenso müßte sie aus ω konsekutiven $\frac{1}{\omega}$-Teilstrecken bestehen, und, wenn $\frac{1}{\omega}$ mit dem Anfangspunkte resp. mit dem einfachen Punkte zusammenfällt, demnach aus ω konsekutiven einfachen Punkten bestehen. In diesem Falle hätten wir aber offenbar kein inkonsekutives Diskretum mehr vor uns, dasselbe hätte sich mit einem Schlage in das konsekutive unendliche Diskretum verwandelt. Will man also dieses letztere vermeiden, d. h. soll das inkonsekutive Diskretum inkonsekutiv sein und bleiben, dann kann $\frac{1}{\omega}$ nicht mit dem Anfangspunkte 0 der endlichen Strecke 1 zusammenfallen, sondern dasselbe muß eine unendlich kleine Strecke darstellen, deren im unendlich kleinen Gebiete liegende Endpunkt von dem Anfangspunkte 0 der Strecke 1 verschieden ist.[1] Ist

[1] Denselben Beweis kann man auch unabhängig von der Voraussetzung des kon-

dem aber so, dann muß auch, wie der Zahl $\omega \cdot 2$ eine unendlich große Strecke entspricht, deren im Unendlichen liegende Punkt von dem Anfangspunkte 0 die doppelte Entfernung des Punktes ω hat, ebenso der Zahl $\frac{1}{\omega \cdot 2}$ eine unendlich kleine Strecke entsprechen, deren im unendlich kleinen Gebiete liegende Endpunkt die halbe Entfernung derjenigen Entfernung von dem Anfangspunkte 0 hat, die der entsprechende Punkt der unendlich kleinen Strecke $\frac{1}{\omega}$ von diesem Anfangspunkte hat usw. in infinitum.[1]

Hieraus folgt nun, daß, wenn in dem inkonsekutiven Diskretum die unendlich große Strecke einen Punkt im Unendlichen hat, in demselben die unendlich kleine Strecke notwendigerweise existieren muß.

Was wir nun in bezug auf die Existenz der unendlich kleinen Strecke in dem inkonsekutiven Diskretum feststellten, läßt sich ohne Änderung auf das Kontinuum übertragen. Wie im Falle, daß die unendlich große Strecke in dem inkonsekutiven Diskretum keinen End-

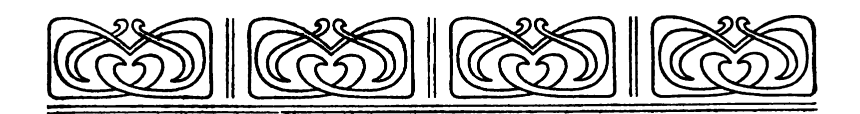
---

sekutiven Diskretums so fassen: wenn die unendlich kleine Strecke in dem inkonsekutiven Diskretum mit dem Anfangspunkte 0 zusammenfällt (und sie braucht dies nur dann nicht zu tun, wenn kein ω-Punkt im unendlich Großen vorausgesetzt wird), dann besteht jede endliche Strecke in demselben aus einfachen konsekutiven Punkten (denn die unendlich kleinen 0-Strecken — Punkte — sind eben als Teilstrecken konsekutiv), womit eben das inkonsekutive Diskretum als solches aufgehoben ist (man kann dasselbe Resultat auch so ausdrücken: aus bloßen Nullen — Null-Strecken — läßt sich keine ausgedehnte Strecke zusammensetzen).

[1] Auf Grund dieser Ausführungen ist es leicht einzusehen, daß der Cantor-Peanosche Beweis (vergl. Cantor, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Bd. 91, S. 112 bis 114, und Peano, Rivista matematica, vol. II, p. 58—62) für die Unmöglichkeit der unendlich kleinen Strecke im inkonsekutiven Diskretum, da beide Forscher in demselben den ω-Punkt im Unendlichen zulassen, von vorneherein unrichtig sein muß. In der Tat gelingt ihnen dieser Beweis — ich lasse beiseite, ob er auch so ganz einwandfrei ist — nur so, daß sie, wie sie der unendlich großen Geraden keinen (festen) Anfangspunkt, so der unendlich kleinen Strecke keinen (festen) Endpunkt zuschreiben. Wir haben aber gesehen, daß im Falle der Zulassung eines ω-Punktes im Unendlichen, wenn nicht von vorneherein die Anwendung der transfiniten Zahlenlehre Cantors unmöglich gemacht werden soll, das Gleichheitskriterium Cantors notwendigerweise mit demjenigen Veroneses vertauscht werden muß, was wiederum, geometrisch ausgedrückt, bedeutet, daß jede Strecke, sei sie unendlich groß oder unendlich klein, notwendigerweise sowohl einen (festen) Anfangs- wie einen (festen) Endpunkt haben muß, womit die Geltung des Cantor-Peanoschen Beweises prinzipiell aufgehoben ist. Vergl. darüber auch die Bemerkungen Veroneses in dessen „Grundzügen der Geometrie", S. 701—705.

punkt im Unendlichen hat, in demselben die unendlich kleine Strecke nicht denkbar ist, ebenso und aus demselben Grunde ist eine solche Strecke in diesem Falle auch in dem Kontinuum undenkbar. Wenn dagegen die unendlich große Strecke einen Endpunkt im Unendlichen hat, dann wird im Kontinuum die unendlich kleine Strecke ebenso existieren müssen, wie sie in dem inkonsekutiven Diskretum existieren muß, ja sogar ist diese Notwendigkeit hier noch einleuchtender. Denn während wir dort auf diese Notwendigkeit daraus schlossen, daß man sonst den einfachen Punkt als den Grenzwert der ins Unendliche abnehmenden endlichen Strecke annehmen müßte, in welchem Falle sich dann aber das inkonsekutive Diskretum in das konsekutive verwandeln würde, fällt diese Möglichkeit hier von vorneherein weg, weil der einfache Punkt in dem Kontinuum keine reelle Bedeutung hat, nicht als dessen wirklicher Bestandteil existiert, so daß also hier auch rein formell nur die unendlich kleine Strecke den Grenzwert der ins Unendliche abnehmenden endlichen Strecke repräsentieren kann. Außerdem, wie wir für das inkonsekutive Diskretum feststellten, daß dasselbe seiner Ausdehnung nach nach oben notwendigerweise unendlich sein müsse, ebenso und aus demselben Grunde muß dies auch in bezug auf das Kontinuum gelten. Sobald man voraussetzen würde, daß beide nach oben ihrer Ausdehnung nach endlich sind, würden sich beide mit einem Schlage in das konsekutive Diskretum verwandeln, denn nur dieses kann sowohl nach oben wie nach unten endlich sein.

Sobald man nun aber die Möglichkeit der unendlich großen Strecken mit dem unendlich fernen Endpunkte in dem inkonsekutiven Diskretum und dem Kontinuum zulassen würde, müßte man, nach dem oben Ausgeführten, mit demselben Rechte solche Geraden auch in dem konsekutiven Diskretum zulassen, in welchem Falle dann in diesem letzteren die unendlich kleinen Strecken ebenso wie in den beiden ersten existieren würden, nur mit dem Unterschiede, daß, während dieselben in den ersteren notwendig wären, dieselben in ihm offenbar mit demselben Rechte zugelassen wie bestritten werden können. Freilich könnten dieselben darin nur so zugelassen werden, wenn es gelänge, all der Widersprüche loszuwerden, die sich der Anwendung der transfiniten Zahlenlehre Cantors auf das konsekutive Diskretum widersetzen. Wir wollen nunmehr voraussetzen, dies Unmögliche sei gelungen, und untersuchen nunmehr in dem nächsten Abschnitt, wie sich dann die Frage nach der sogenannten Mächtigkeit des Kontinuums gestalten wird.



Vierter Abschnitt.

Bemerkungen zum Kontinuumproblem.

Das Kontinuumproblem besteht bekanntlich in der Frage, welche Mächtigkeit der Gesamtheit aller reellen (ganzen, gebrochenen und irrationalen) Zahlen, resp. aller reellen Zahlen, die zwischen 0 und 1 liegen, zukommt. Man glaubt allgemein, daß die Antwort auf diese Frage zugleich die Antwort auf die Frage der Mächtigkeit der unendlichen (inkonsekutiven) Punktenmenge einer endlichen Strecke in sich schließt, da eine eindeutige Zuordnung der Punkte der letzteren mit den Zahlengliedern der ersteren zu bestehen scheint. Da nun, wie Cantor gezeigt hat[1], die Mächtigkeit des unendlichen, inkonsekutiven Raumes von unendlich vielen Dimensionen mit der Mächtigkeit der Punktmenge einer begrenzten Strecke (das lineare Kontinuum) zusammenfallen soll, so wird die Antwort auf die Frage der Mächtigkeit des Zahlenkontinuums für identisch mit der Antwort auf die Frage der Mächtigkeit des Raumkontinuums gehalten.

Im Folgenden wollen wir auf die Frage der Mächtigkeit des Zahlenkontinuums als solche gar nicht eingehen, was wir nachweisen wollen, ist nur, daß die eben erwähnte Voraussetzung der Identität dieser Mächtigkeit mit derjenigen des Raumkontinuums unrichtig ist, daß diese beiden Fragen ganz unabhängig voneinander sind, und daß die Frage nach der Mächtigkeit des Raumkontinuums, wenn sie einmal von derjenigen des Zahlenkontinuums getrennt wird, sich leicht beantworten läßt, während diese nach wie vor offen bleibt.

Um die Richtigkeit dieser unserer Trennung des Zahlen- von dem Raumkontinuum einsehen zu können, wollen wir uns zunächst mit dem Problem des Zahlenkontinuums bekannt machen, was wiederum zuvor die Bekanntschaft mit der transfiniten Mächtigkeitslehre Cantors voraussetzt.

[1] Vergl. Cantor, „Mathematische Annalen", Bd. 46, S. 488: „Das ν-dimensionale, wie das $\aleph_0$-dimensionale Kontinuum haben die Mächtigkeit des eindimensionalen Kontinuums".

Wir haben früher gesehen, daß Cantor unter der Mächtigkeit oder der Kardinalzahl eine Zahl versteht, in der nicht nur, wie in der Ordinalzahl, von der Beschaffenheit der Elemente, sondern in der auch von ihrer Ordnung abstrahiert wird.[1] Während nun bei den endlichen Zahlen nur dieser rein begriffliche Unterschied zwischen den Kardinal- und den Ordinalzahlen besteht, so daß jeder endlichen Kardinalzahl nur eine endliche Ordinalzahl entspricht, ist bei den unendlichen Zahlen, wie wir früher sahen, das nicht mehr der Fall, bei ihnen entspricht einer und derselben Kardinalzahl eine unendliche Menge von Ordinalzahlen. Denn die Ordinalzahl der unendlichen Menge

$$1, 2, 3, 4, \ldots \nu \ldots$$

ist wohl von der Ordinalzahl der unendlichen Menge

$$1, 2, 3, 4, \ldots \nu \ldots \omega$$

verschieden (die erste hat die Ordinalzahl ω, die zweite $\omega + 1$), ihre Kardinalzahl ist dagegen dieselbe, es ist die erste oder die kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$ (Alef-Null), welche die Gesamtheit aller endlichen Kardinalzahlen

$$1, 2, 3, 4, \ldots \nu \ldots$$

bedeutet. Denn die Abstraktion von der Ordnung der Elemente in der zweiten Menge ist gleichbedeutend mit dem Setzen derselben in irgendeine Ordnung, also auch in die Ordnung:

$$\omega, 1, 2, 3, 4, \ldots \nu \ldots$$

und in dieser letzteren Form hat sie offenbar dieselbe Kardinalzahl mit der Menge

$$1, 2, 3, 4, \ldots \nu \ldots,$$

also die Kardinalzahl Alef-Null.[2] Es läßt sich weiter auf dieselbe Weise nachweisen, daß auch die unendliche Menge

---

[1] Wenn man sich auf den Standpunkt der strengen Logik stellt, d. h. nur dasjenige für logisch möglich zuläßt, was auch reell möglich ist, dann ist es nicht schwer einzusehen, daß diese Cantorschen Kardinalzahlen logisch gar nicht denkbar sind. Denn wenn unter der Ordinalzahl die Zahl von Einheiten mit Beibehaltung ihrer Ordnung verstanden wird, dann ist überhaupt nur eine solche Zahl denkbar, da reelle Einheiten (insbesondere die einfachen Raum- und Zeitpunkte) nur bestehen können, wenn sie in einer bestimmten Ordnung gegeben sind. Die Kardinalzahl Cantors ist demnach eine bloße logisch-formelle Fiktion, der in der Wirklichkeit gar nichts entspricht. Über die logischen Mängel der transfiniten Zahlenlehre Cantors vergl. man auch meine „Prinzipien der Metaphysik ꝛc." die Anmerkung S. 219.

[2] Man sieht hieraus am besten, daß unsere Behauptung in der vorigen An-

$$1, 2, 3, 4, \ldots \nu \ldots \omega, \omega + 1,$$

welcher die Ordinalzahl $\omega + 2$ entspricht, der Kardinalzahl $\aleph_0$ entspricht usw. Alle die unendlichen Ordinalzahlen nun, denen die erste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$ entspricht, bilden nach Cantor (vgl. S. 34 dieser Abhandlung) die Zahlen der Zahlenklasse (II), während die endlichen Ordinalzahlen die Zahlen der Zahlenklasse (I) ausmachen. Wie nun die Gesamtheit dieser letzteren Zahlen die erste unendliche Mächtigkeit oder die Kardinalzahl $\aleph_0$ hat, so hat auch die Gesamtheit aller Zahlen der Zahlenklasse (II) die zweitgrößte unendliche Mächtigkeit oder die Kardinalzahl $\aleph_1$ (Alef-Eins). Auf dieselbe Weise entspricht dann der Gesamtheit aller Zahlen der Zahlenklasse (III) die Mächtigkeit $\aleph_2$ (Alef-Zwei) usw., so daß auf diese Weise die unbegrenzte Folge von unendlichen Kardinalzahlen

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots \aleph_\nu, \ldots \aleph_\omega \ldots$$

entsteht. In dieser Weise fortschreitend kommt man schließlich zur Frage, ob der Gesamtheit aller endlichen und unendlichen Ordinalzahlen überhaupt, der sogenannten Menge W, eine Mächtigkeit, die in diesem Falle die *letzte* wäre, zukommt oder nicht. In dieser Frage stimmen bekanntlich die Vertreter der Mengenlehre nicht miteinander überein. Cantor selbst betrachtet die Menge W für eine „inkonsistente", d. h. für eine Menge, die keinen Ordnungstypus und demnach auch keine Mächtigkeit hat.[1]

Mit dieser schwierigen Frage nach der Mächtigkeit der Menge W verbindet sich weiter die Frage nach der Berechtigung der Zahlenklassen, die höher als die zweite sind. Da die Zahlen der höheren Zahlenklassen auf Grund derselben beiden Grundprinzipe entstehen,

---

merkung, Cantors Kardinalzahl sei eine bloße Fiktion, richtig ist. Denn daß zwei unendliche Ordinalzahlen eine und dieselbe Kardinalzahl besitzen, gelingt es Cantor nur so nachzuweisen, daß er die der einen von diesen Zahlen eigentümliche Ordnung ihrer Elemente aufhebt und ihr diejenige der anderen substituiert, wodurch die Unmöglichkeit des selbständigen Bestehens der Kardinalzahl in seinem Sinne am besten dokumentiert wird. Freilich muß man ausdrücklich hervorheben, daß die Richtigkeit der transfiniten Ordinalzahlenlehre von der Richtigkeit der transfiniten Kardinalzahlenlehre unabhängig ist und daß auch, wenn die letztere ganz verworfen wird (wie dies z. B. Veronese tut), das Kontinuumproblem noch immer bestehen bleibt, nur führt sich dasselbe in diesem Falle auf das einfache Dilemma der bestimmten oder unbestimmten Unendlichkeit (vergl. weiter unten) zurück.

[1] Vergl. darüber z. B. den Aufsatz von F. Bernstein „Über die Reihe der transfiniten Ordinalzahlen" in „Mathematischen Annalen", Bd. 60, 1904, S. 187—189.

auf Grund deren die Zahlen der zweiten Zahlenklasse entstehen und in diesem Sinne also nur eine einfache Fortsetzung der letzteren repräsentieren, so erhebt sich die Frage, ob man denn überhaupt von der Gesamtheit der Zahlen zweiter Zahlenklasse in demselben Sinne zu sprechen berechtigt ist, wie dies von der Gesamtheit der Zahlen erster Zahlenklasse gilt. Auch in dieser Frage stimmen die Vertreter der Mengenlehre miteinander nicht überein, es gibt unter ihnen solche, die nur die Zahlen zweiter Zahlenklasse zulassen, während Cantor selbst auch an den höheren Zahlenklassen festhält.[1] Sollten nun alle die unendlichen Ordinalzahlen der Menge W eine einzige Zahlen-

[1] So z. B. bestreitet Hobson entschieden die Existenz höherer Zahlenklassen (vergl. dessen Aufsatz «The general theory of transfinite numbers» in «Proceedings of the London math. Society», Ser. 2, vol. III, insbes. p. 185—187). In der Tat hat Cantor kein besonderes Prinzip angegeben, das fähig wäre, die höheren Zahlenklassen als besondere Abschnitte der unendlichen Reihe der Ordinalzahlen abzugrenzen. Denn da die Zahlen der zweiten und aller übrigen vorausgesetzten Zahlklassen auf Grund der beiden ersten Prinzipe der Erzeugung transfiniter Zahlen (Prinzip der konsekutiven Hinzufügung von Einheiten und Prinzip der Limeszahl) entstehen, so genügt das (dritte) sogenannte Mächtigkeitsprinzip als solches nicht, um diese Zahlen in Zahlenklassen abzuteilen, da sich der Begriff der Mächtigkeit auf dem Begriffe der Gesamtheit gründet, die diesbezügliche Zusammenfassung der transfiniten Zahlen, die auf Grund der beiden ersten Prinzipe entstehen, in ein Ganzes aber, wenn diese Zusammenfassung **nicht alle** diese Zahlen **auf einmal** umfassen soll, offenbar ein neues besonderes Prinzip voraussetzt und erfordert. Hier liegt also eine offenbare logische Lücke in Cantors Begründung der transfiniten Zahlenlehre. Auch ist es sehr schwer, sich irgendeinen Weg zu denken, auf dem sie zu vermeiden wäre. Vielleicht ließe es sich denken, daß die Einführung der höheren arithmetischen Operationen, ohne die sich übrigens transfinite Zahlen, die größer als $\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$ sind, weder begrifflich fixieren noch zeichenmäßig darstellen lassen, zu einem solchen Ziele führen könnte. Wenn man die Multiplikation als die erste aus der Addition (z. B. zweier gleichen Zahlen) hervorgehende höhere Operation mit a^{2_0}, die Potenzierung mit a^{2_1} bezeichnet, dann kann man die nächst höhere aus der Potenzierung hervorgehende mit a^{2_2} usw. bezeichnen, und so würde man schließlich zu einer arithmetischen Operation a^{2_ω} kommen müssen, und da ließe es sich nun denken, daß diese arithmetische Operation unendlicher Ordnung zugleich eine Zahl liefert, deren Mächtigkeit nicht mehr $\aleph_0$ sei, die also die erste Zahl der dritten Zahlenklasse darstellt. Dann würde weiter die unendliche Operation $a^{2_{\omega\cdot 2}}$ die erste Zahl der vierten Zahlenklasse liefern usw. Ich überlasse es gänzlich den Vertretern der Mengenlehre zu prüfen, ob sich mit diesem Gesichtspunkte etwas anfangen läßt. und bemerke nur, daß ich aus allgemeinen logischen Gründen nicht an den Erfolg der Sache glaube.

klasse bilden, so würde man dann nur noch zu fragen haben, ob die Gesamtheit derselben eine Mächtigkeit hat oder nicht. Besteht eine solche, dann hätten wir nur zwei transfinite Mächtigkeiten, $\aleph_0$ und $\aleph_1$, besteht eine solche nicht, dann hätten wir nur eine einzige transfinite Mächtigkeit, eben die Mächtigkeit $\aleph_0$.

Nachdem wir uns so mit der transfiniten Mächtigkeitslehre Cantors bekannt gemacht haben, wollen wir nunmehr seine Formulierung des Kontinuumproblems besprechen. Cantor hat bekanntlich zwei Formulierungen des Kontinuumproblems gegeben: in der älteren Form hat er es in mehr geometrischem Sinne getan (wie ja überhaupt das geometrische Kontinuumproblem der Ausgangspunkt seiner transfiniten Zahlenlehre gewesen ist), in der späteren Form dagegen hat er es in rein arithmetischem Sinne getan. Wir wollen uns hier nur mit dieser letzteren beschäftigen.[1]

Das Zahlenkontinuum ist nach Cantor und Dedekind[2] identisch mit der Gesamtheit aller reellen Zahlen, d. h. mit der Gesamtheit 1. aller ganzen positiven und negativen Zahlen mit Einschluß der Null:

$$\ldots . \nu \ldots ., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots . \nu, \ldots .$$

2. aller gebrochenen positiven und negativen Zahlen, die zwischen je zweien Zahlen der ersten Reihe einzuschalten seien (so liegen z. B. zwischen 0 und 1 alle echten Brüche, die sich leicht in ihrer natürlichen Ordnung gewinnen lassen auf Grund der Formel $x = \frac{m+p}{n+q}$, wenn $a = \frac{m}{n}$ und $b = \frac{p}{q}$ zwei schon bekannte Brüche sind:

$$0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad 1),$$

3. aller irrationalen positiven und negativen Zahlen, die zwischen je zweien Zahlen der ersten durch die zweite ergänzten Reihe einzuschalten seien (so z. B. liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 in der ersten Reihe).

[1] Über den Unterschied dieser beiden Definitionen des Kontinuums Cantors vgl. man den Aufsatz von L. Couturat «Sur la definition du continue» in «Revue de Metaphysique et de Morale», 1900, p. 157 ff.

[2] Vergl. Cantor, Math. Annalen, Bd. XXI, S. 574, und Dedekind, „Stetigkeit und irrationale Zahlen", 2. Aufl., 1892, § 3.

Wenn die erste Reihe durch die zweite vervollständigt wird, dann liegt in der so gewonnenen Menge aller positiven und negativen rationalen Zahlen zwischen je zwei Elementen stets ein drittes, so daß die Menge aus inkonsekutiven Elementen besteht. Cantor nennt eine solche inkonsekutive Menge „überalldicht“.[1] In der überalldichten Menge aller rationalen Zahlen läßt sich nun jede Zahl als Grenzelement einer unendlichen Menge anderer Zahlen dieser Menge darstellen (so z. B. ist 0 das Grenzelement der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ....., so ist 1 das Grenzelement der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ ....., so ist 2 das Grenzelement der Reihe $\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}$......, so ist $\frac{1}{2}$ das Grenzelement der Reihe $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}$, ... usw.). Jede solche unendliche Reihe von rationalen Zahlen hat offenbar den Ordnungstypus ω (oder $^*\omega$) und wird von Cantor eine Fundamentalreihe (erster Ordnung) genannt und jedes Element einer Menge, die Grenzelement einer Fundamentalreihe derselben darstellt, nennt er das Hauptelement derselben und eine Menge, in der, wie in der Menge aller rationalen Zahlen, jedes Element derselben zugleich Hauptelement ist, nennt er „insichdicht“.[2] Aus der Definition der überalldichten Menge folgt, wie leicht einzusehen ist, daß dieselbe zugleich auch insichdicht sein muß.

Obgleich nun jedes Element der Menge aller rationalen Zahlen als Hauptelement, d. h. als Grenzelement einer Fundamentalreihe in derselben zu betrachten ist, hat umgekehrt nicht jede Fundamentalreihe in derselben ein Grenzelement, es gibt in dieser Menge sogar unendlich viele Fundamentalreihen, denen keine (rationalen) Grenzelemente entsprechen. So hat z. B. die Fundamentalreihe der Dezimalbrüche

$$0.1,\ 0.12,\ 0.123,\ 0.1235,\ 0.12357,\ 0.1235711, \ldots..$$

(in denen die Dezimalstellen aufeinanderfolgenden Primzahlen entsprechen) kein Grenzelement in der Menge aller rationalen Zahlen. Dies ist nun der Grund, der uns nach Cantor und Dedekind dazu nötigt, die Menge aller rationalen Zahlen durch irrationale Zahlen zu ergänzen, so daß die so vervollständigte Menge aller reellen Zahlen

[1] Cantor, Math. Annalen, Bd. 46, § 9, S. 504.

[2] ib. § 10, S. 509—510.

keine Lücken mehr hat und in diesem Sinne das absolute Zahlenkontinuum darstellt. Eine Menge nun, in der, wie in der Menge aller reellen Zahlen, jede Fundamentalreihe ein Grenzelement hat, nennt Cantor „abgeschlossen", und eine Menge, die, wie die Menge aller reellen Zahlen, nicht nur abgeschlossen, sondern auch insichdicht ist, nennt er eine „perfekte" Menge.[1]

Auf Grund aller dieser Bestimmungen folgt, daß das Zahlenkontinuum eine Menge darstellt, die 1. perfekt (d. h. insichdicht und abgeschlossen ist) und 2. überalldicht ist, und zwar so überalldicht ist, daß zwischen je zwei Elementen der Menge des Zahlenkontinuums Elemente der Menge aller rationalen Zahlen liegen. Und damit ist eine erschöpfende Definition des Kontinuums im arithmetischen Sinne gegeben.[2]

Es erhebt sich nun die Frage nach der Mächtigkeit dieser Menge, und in dieser Frage besteht das sogenannte Kontinuumproblem. Daß die Menge aller rationalen Zahlen die Mächtigkeit $\aleph_0$ hat, das läßt sich leicht beweisen. Zunächst ist es leicht einzusehen, daß sich alle rationalen Zahlen, die zwischen 0 und 1 liegen, in die Form einer einfachen unendlichen Reihe bringen lassen, was in der einfachsten Weise so geschehen kann, daß der Nenner ν einer jeden von ihnen einer endlichen Zahl in der natürlichen Zahlreihe entspricht, im Zähler aber Zahlen von 1 bis $\nu—1$ vorkommen, wobei Brüche, die schon vorkommen, auszulassen sind. Man gelangt so zu der folgenden einfach unendlichen Reihe aller echten Brüche:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7} \ldots .$$

Da diese Reihe einfach unendlich ist (d. h. deren Ordnungstypus ω ist), so hat sie die Mächtigkeit $\aleph_0$.[3]

Ebenso lassen sich weiter alle positiven rationalen Zahlen in eine einfach unendliche Reihe bringen, was in dem folgenden Schema geschieht:

[1] Cantor, Math. Annalen, Bd. 46, § 10, S. 510.

[2] Cantor selbst gibt diese Definition in den Math. Annalen, Bd. 46, S. 511, nur in bezug auf das lineare Zahlenkontinuum 0 . . . . 1 (die Menge X), indem er dessen Ordnungstypus mit Θ und den entsprechenden Ordnungstypus der Menge der rationalen Zahlen 0 . . . . 1 (die Menge R) mit η bezeichnet.

[3] Vgl. R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, 1905, p. 28.

$$\begin{array}{llllll} \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \ldots\ldots & \frac{1}{\lambda}, & \ldots\ldots \\ \frac{2}{1}, & \frac{2}{3}, & \frac{2}{5}, & \ldots\ldots & \frac{2}{\mu}, & \ldots\ldots \\ \frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{4}, & \ldots\ldots & \frac{3}{\nu}, & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

worin in jedem Bruch Zähler und Nenner ohne gemeinsamen Teiler sind und daher jede rationale Zahl nur einmal vorkommt[1], und das man nur in diagonalen Richtungen zu lesen braucht, um die Form einer einfachen unendlichen Reihe zu haben. In ähnlicher Weise läßt sich dann dasselbe für alle rationalen Zahlen überhaupt nachweisen. Wie aus diesen Ausführungen erhellt, hat die Menge der rationalen Zahlen, die zwischen 0 und 1 liegen, oder die Menge R, wie sie Cantor nennt, dieselbe Mächtigkeit wie die Gesamtheit aller rationalen Zahlen überhaupt.

Dementsprechend nun schließt Cantor, daß auch die Mächtigkeit aller reellen Zahlen überhaupt dieselbe ist wie die Mächtigkeit der reellen Zahlen, die zwischen 0 und 1 liegen. Diese letztere Menge nennt er die Menge des „Linearkontinuums X“ und beweist, daß dieselbe nicht die Mächtigkeit der Menge R hat, indem er ausführt, daß sich die Glieder derselben nicht in die Form einer einfachen unendlichen Reihe bringen lassen. Weiter beweist er dann, daß auch die Menge aller reellen Zahlen überhaupt nicht abzählbar ist und schließlich, daß sie die Mächtigkeit des Linearkontinuums X hat. Er vermutet, daß diese Mächtigkeit mit der zweitgrößten Mächtigkeit $\aleph_1$ identisch ist, aber einen strengen Beweis dafür hat er nicht geliefert, so daß die Frage dieser Mächtigkeit noch immer ungelöst ist, und darin besteht eben das sogenannte Kontinuumproblem.

Cantor und die übrigen Vertreter der Mengenlehre sind nun der Meinung, daß mit der Lösung dieses Problems der Mächtigkeit des Zahlenkontinuums zugleich auch das Problem der Mächtigkeit des Raumkontinuums gelöst wäre. Wir wollen nunmehr nachweisen, daß dies nicht der Fall ist, daß das Problem des Raumkontinuums ein besonderes, von demjenigen des Zahlenkontinuums unabhängiges ist.

Die eindeutige Zuordnung nämlich, die man zwischen den Gliedern des Zahlen- und denjenigen des Raumkontinuums be-

[1] A. Schönfließ, Jahresbericht der deutschen Math.-Verein., Bd. VIII, H. 2, S. 12.

stehend voraussetzt, besteht **nicht**. Daß jeder rationalen Zahl der kontinuierlichen Zahlmenge 0 . . . . 1 ein Punkt in der inkonsekutiven Punktmenge einer begrenzten Strecke (vgl. Fig. 15) entspricht, das ist etwas Einleuchtendes. Daß auch jeder irrationalen Zahl in der kontinuierlichen Zahlmenge 0 . . . . 1 ein Punkt in der inkonsekutiven

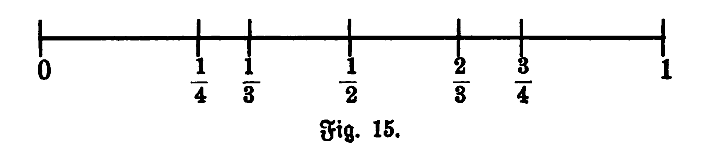


Fig. 15.

Punktmenge der Fig. 15 entspricht, ist etwas, was zwar nicht ebenso einleuchtend ist, was aber notwendigerweise vorausgesetzt werden muß, wenn die inkonsekutive Punktmenge keine Lücken in sich enthalten soll.[1] Daß aber auch umgekehrt jedem Punkte in der inkonsekutiven Punktmenge 0 . . . 1 eine Zahl in der kontinuierlichen Zahlmenge 0 . . . 1 entspricht, ist etwas, worauf wohl auf Grund der beiden gleich unten anzuführenden Analogien zwischen beiden geschlossen wird, was aber ungerechtfertigt ist, da eine tiefere Betrachtung zeigt, daß diese Analogien nicht genügen, volle Identität in der besagten Beziehung zwischen beiden zu statuieren. Die Analogien sind folgende:

1. Zwischen je zweien Zahlen der kontinuierlichen Zahlenmenge ist immer eine dritte vorhanden, so wie zwischen je zweien Punkten der kontinuierlichen Punktenmenge ein dritter dazwischenliegt.

2. Jede Zahl der kontinuierlichen Zahlmenge stellt das Grenzelement einer Fundamentalreihe von Zahlen derselben Menge dar, sowie jeder Punkt der kontinuierlichen Punktmenge den Grenzpunkt einer aus unendlich vielen Punkten bestehenden Teilmenge dieser Menge darstellt.

Auf Grund dieser beiden Analogien kommt man dann zum Schluß, daß jedem Punkt der kontinuierlichen Punktmenge eine Zahl in der kontinuierlichen Zahlmenge entspricht, daß also die unendliche Menge der Elemente des Zahlenkontinuums mit der unendlichen Menge der Elemente des Raumkontinuums äquivalent ist. Ich will nun beweisen, daß diese Schlußfolgerung auf Grund jener beiden Analogien nicht gezogen werden kann.

---

[1] Vergl. darüber Dedekind, „Stetigkeit und irrationale Zahlen“, 2. Aufl., S. 11.

Es braucht nämlich daraus, daß die Glieder der kontinuierlichen Zahlmenge inkonsekutiv sind, gar nicht zu folgen, daß auch die Punkte der geraden Strecke inkonsekutiv sein müssen, dies wäre nur dann der Fall, wenn es von vorneherein feststünde, daß jeder Punkt der geraden Strecke einer Zahl in der inkonsekutiven Zahlmenge entspricht. Gerade diese Voraussetzung ist es aber, die in Frage steht. Wir können uns in der Tat ganz gut eine aus konsekutiven Punkten bestehende begrenzte Strecke denken, in der es zu jeder Zahl der kontinuierlichen Zahlmenge entsprechende Punkte gibt, in der es aber auch Punkte gibt, die diesen Zahlen nicht entsprechen, und zwar ist die Möglichkeit einer solchen Punktmenge nicht zu bestreiten, sobald die Möglichkeit des konsekutiven Diskretums in Betracht gezogen wird. Denn dann ist es offenbar, daß die begrenzte Strecke der Figur 15 als eine aus einer unendlichen Anzahl von sich miteinander unmittelbar berührenden Punkten bestehende Strecke gedacht werden könne. In einer solchen Strecke aber stellen die einfachen irreellen Zwischenpunkte offenbar unendlich kleine Strecken erster Ordnung dar, und da die Zahlen der kontinuierlichen Zahlenmenge 0 .... 1 nur den endlichen Segmenten der begrenzten Strecke der Figur 15 entsprechen können resp. nur den Punkten, die mit dem Anfangspunkte 0 in endlichen Abständen liegen, so ist es klar, daß es zwischen je zweien Punkten einer solchen aus unendlich vielen konsekutiven Punkten bestehenden Strecke stets Punkte geben wird, denen keine Zahlen in der kontinuierlichen Zahlenmenge 0 .... 1 entsprechen (so z. B. entspricht dem ersten Punkte, der sich mit dem 0-Punkt berührt, gar keine Zahl in der Zahlmenge 0 ... 1, da das entsprechende Segment eben unendlich klein ist, und dasselbe wird auch für den zweiten, dritten usw. Punkt gelten).

Ist dem nun so für die aus einer ω-Anzahl von Punkten bestehende konsekutive Punktmenge, so wird es um so mehr für die aus irgendeiner bestimmten unendlichen Ordinalzahl von Punkten bestehende Punktmenge gelten und schließlich auch für die unendliche lineare Punktmenge, deren Anzahl schlechthin unbestimmt unendlich, d. h. gleich der Menge W ist. Die Punkte der letzteren werden nun aber offenbar nicht mehr konsekutiv sein können. Denn setzt man einmal konsekutive unendliche Punktmengen voraus, so ist es klar, daß, da eine jede solche Punktmenge ein erstes und ein letztes Glied hat und die Glieder vom ersten angefangen aufein-

anderfolgend sind, die Elemente derselben sich nur den Elementen einer bestimmt-unendlichen Reihe von endlichen und unendlichen Ordinalzahlen, die ein letztes Glied hat, eindeutig zuordnen lassen werden, die letztere aber stets einen Ordnungstypus hat und demnach auch die entsprechende unendliche, konsekutive, lineare Punktmenge einer bestimmt-unendlichen Ordinalzahl entsprechen wird. Daraus folgt dann umgekehrt, daß die Menge W nicht mehr einer konsekutiven, linearen, unendlichen Punktmenge entsprechen kann, und daß, wenn eine unendliche lineare Punktmenge existieren soll, die ihr entspricht, dieselbe nur inkonsekutiv sein könne. Also kann, da jede bestimmte noch so große unendliche Ordinalzahl einer konsekutiven linearen Punktmenge entspricht, der inkonsekutiven, linearen Punktmenge nur die Gesamtheit aller endlichen und unendlichen Ordinalzahlen oder die Menge W entsprechen. Sobald man also die Möglichkeit einer aus unendlich vielen konsekutiven Punkten bestehenden endlich-linearen Punktmenge in Betracht zieht, muß man einsehen:

1. daß nicht jeder Punkt der begrenzten Geraden (der linearen unendlichen Punktmenge) einer Zahl in der kontinuierlichen Zahlmenge 0 . . . . 1 entspricht, und

2. daß die Anzahl der Punkte in einer aus inkonsekutiven Punkten bestehenden begrenzten Geraden nur eine unbestimmt-unendliche sein könne.

Sind diese beiden Sätze richtig (und sie stehen und fallen miteinander, da sie beide aus einem und demselben gemeinsamen Grunde, der Voraussetzung der konsekutiven, linearen, unendlichen Punktmenge, folgen), dann ist damit erstens unsere Behauptung, daß das Problem des Zahl- mit demjenigen des Raumkontinuums nicht zusammenfällt, bewiesen, und zweitens ist damit zugleich das letztere Problem prinzipiell gelöst. Der zweite der obigen Sätze stellt nämlich fest, daß die Anzahl der Punkte in der inkonsekutiven linearen Punktmenge nur eine unbestimmt-unendliche sein könne, daß also das lineare Raumkontinuum (und demnach das Raumkontinuum überhaupt) entweder die höchste mögliche Mächtigkeit (wenn die Menge W noch eine solche hat) oder überhaupt keine solche hat. Wie man also hieraus sieht, läßt sich das Problem des Raumkontinuums, sobald die logische Möglichkeit des konsekutiven Diskretums in Betracht gezogen wird, ohne weiteres lösen, während das Problem des Zahlenkontinuums, als ein davon unabhängiges, nach wie vor offen bleibt.